XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Soluciones
Primera Eliminatoria Nacional

Nivel II

(8° y 9°)

2023

Estimado estudiante:
La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2023 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

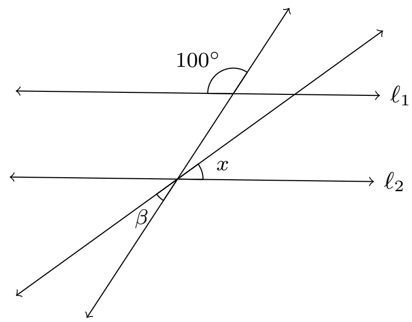
INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. Considere la siguiente figura en la que $\ell_1 || \ell_2$ y $\measuredangle\beta = \measuredangle x + 10°$:



¿Cuál es la medida del ángulo x?

(a) 30°
(b) 35°
(c) 70°
(d) 75°

Opción correcta: (b)

Solución:

El ángulo interno del triángulo que es opuesto por el vértice al ángulo de 100°, es congruente con él. Del mismo modo, el otro ángulo interno del triángulo opuesto por el vértice al ángulo β mide lo mismo que β. Por otro lado, el tercer ángulo interno del triángulo es congruente con el ángulo x, son alternos internos entre paralelas. Entonces, debido a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, se tiene que $x + \beta + 100 = 180$. Como $\measuredangle\beta = \measuredangle x + 10°$, se deduce que $\measuredangle x = 35°$.

2. Considere el número $2023^{2023} + 2023^{2024}$ y analice las siguientes proposiciones:

   I. El número es divisible por 2.

   II. El número es divisible por 3.

   ¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas?

   (a) Únicamente la I.
   (b) Únicamente la II.
   (c) Ambas.
   (d) Ninguna.

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Observe que $2023^{2023} + 2023^{2024} = 2023^{2023}(1 + 2023) = 2023^{2023} \cdot 2024$. Como 2024 es par, es divisible por 2, es decir, la proposición I es verdadera. Por otro lado, ni 2023 ni 2024 son múltiplos de 3, por lo que el número no es divisible por 3.

3. Sean a y b dos números enteros positivos tales que $ab = 10$. El valor numérico de la expresión

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{5}}$$

corresponde a

(a) 3
(b) 8
(c) 12
(d) 26

Opción correcta: (a)

Solución: La expresión algebraica dada es equivalente a

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{5}} = \frac{\frac{ab+2}{2b}}{\frac{a}{5}} = \frac{5ab+10}{2ab}$$

Como $ab = 10$, entonces $\dfrac{5ab+10}{2ab} = \dfrac{5 \cdot 10 + 10}{2 \cdot 10} = \dfrac{60}{20} = 3$.

4. Considere un triángulo ABC recto en B y sea D un punto de $\overline{BC}$ tal que $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Si $AB = 5$ y $AC = 13$, entonces ¿cuál es el área del triángulo ADC?

   (a) 30 cm^2
   (b) 20 cm^2
   (c) 10 cm^2
   (d) 25 cm^2

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Por el Teorema de Pitágoras se tiene que $BC = 12$ cm. Entonces $BD = 4$ cm, por lo que el área de $\triangle ABD$ es 10 cm^2. Análogamente, el área de $\triangle ABC$ es 30 cm^2, por lo que el área de $\triangle ADC$ es 20 cm^2.

5. En una clase realizan un juego en el que cada estudiante va acumulando puntos. Si al final del juego cada mujer hubiera obtenido 2 puntos más, el puntaje promedio habría sido 0,9 puntos más alto que el actual. El porcentaje de hombres de la clase corresponde a

   (a) 65 %
   (b) 35 %
   (c) 45 %
   (d) 55 %

   Opción correcta: (d)

   Solución:

   Si se denota con x la cantidad de hombres, y la cantidad de mujeres y N la cantidad total de puntos, entonces se tiene que:

$$\frac{2y+N}{x+y} = 0{,}9 + \frac{N}{x+y} \implies \frac{2y}{x+y} = 0{,}9$$
$$\implies \frac{y}{x+y} = 0{,}45.$$

   Por lo que el porcentaje de hombres en la clase es de 55 %.

6. ¿Cuál es la cantidad de números de tres cifras que son múltiplos de 2 y 13?

   (a) 26
   (b) 35
   (c) 69
   (d) 76

   Opción correcta: (b)

   Solución: El menor número divisible por 13 de tres cifras es 104 ($104 = 13 \cdot 8$) y el mayor 988 ($988 = 13 \cdot 76$). Eso quiere decir que hay 69 números de tres cifras divisibles por 13 ($76 - 8 + 1$). De ellos, hay 35 pares ($68 \div 2 + 1$), por lo que hay 35 números de tres cifras divisibles por 13 y por 2.

7. En una caja hay inicialmente 258 bolas de colores rojas y verdes. Las bolas rojas son el doble de las verdes. Si se quiere agregar x cantidad de bolas verdes para que el porcentaje de ellas en la caja sea del 75 %, podemos afirmar con certeza que el valor de x cumple que

   (a) $400 < x \leq 420$
   (b) $420 < x \leq 440$
   (c) $440 < x \leq 460$
   (d) $460 < x \leq 480$

   Opción correcta (b)

   Solución:

   Como las bolas rojas son el doble de las verdes, entonces estás son la tercera parte del total, es decir $258 \div 3 = 86$ y las bolas rojas serán 172. Como se quiere que el porcentaje de bolas verdes sea del 75 %, las bolas rojas serán el 25 %. Entonces si v representa la cantidad de bolas verdes, la razón Verde : Roja $= v : 172 = 75 : 25 = 3$ por tanto $v = 516$. Como inicialmente hay 86, se deben agregar $516 - 86 = 430$.

8. Dado que $2020x^3 + 2021x^2 + 2022x + 2023 = 1030x^3 + 1031x^2 + 1032x - 1937$, el valor de $x^3 + x^2 + x + 1$ es

   (a) -1
   (b) -2
   (c) -3
   (d) -4

   Opción correcta: (c)

   Solución:

   Reduciendo términos semejantes en la ecuación dada se puede obtener que

   $$990x^3 + 990x^2 + 990x = -3960$$

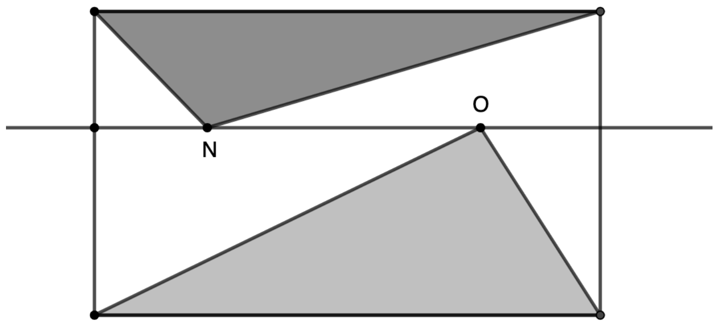
   Dividiendo por 990 se obtiene

   $$x^3 + x^2 + x = -4$$

   Y sumando 1 tenemos que

   $$x^3 + x^2 + x + 1 = -3$$

9. En la figura se muestra un rectángulo y una recta paralela a su base. Dos puntos N y O están sobre la recta paralela y dentro del rectángulo. La suma de las áreas de los dos triángulos sombreados es $50cm^2$. ¿Cuál es el área del rectángulo?



(a) $150cm^2$
(b) $200cm^2$
(c) $100cm^2$
(d) $250cm^2$

Opción correcta: (c)

Solución: Llamemos b a lado largo del rectángulo y que a su vez es la base de ambos triángulos. Sea $H1$ y $H2$ las alturas de los triángulos dados. La suma de las áreas de los triángulos esta dado por

$$\frac{b \cdot H1}{2} + \frac{b \cdot H2}{2} = 50$$

$$\frac{b \cdot H1 + b \cdot H2}{2} = 50$$

$$\frac{b\,(H1 + H2)}{2} = 50$$

$$b\,(H1 + H2) = 100$$

Note que H1+H2 es el lado ancho del rectángulo, por tanto el área del rectángulo es igual a $100cm^2$

10. Sea $N = 128^{289} \cdot 25^{1012} - 1$. La cantidad de dígitos que tiene N corresponde a

    (a) 2022
    (b) 2023
    (c) 2024
    (d) 2025

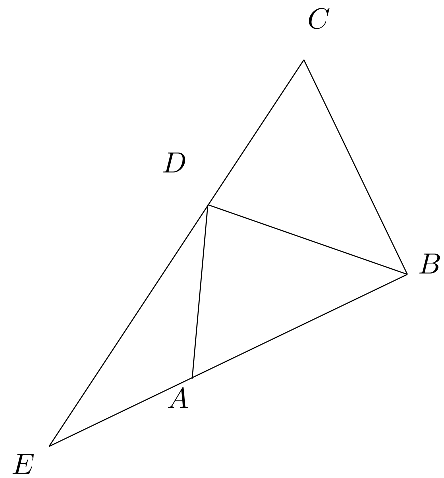
    Opción correcta (c)

    Solución:

$$N = 128^{289} \cdot 25^{1012} - 1$$
$$N = \left(2^7\right)^{289} \cdot \left(5^2\right)^{1012} - 1$$
$$N = \left(2^7\right)^{289} \cdot \left(5^2\right)^{1012} - 1$$
$$N = (2)^{2023} \cdot (5)^{2024} - 1$$
$$N = 5 \cdot (10)^{2023} - 1$$
$$N = 5\underbrace{000\cdots000}_{\text{2023 ceros}}-1$$
$$N = 4\underbrace{999\cdots999}_{\text{2023 nueves}}$$

Por tanto N tiene 2024 cifras.

11. Considere la siguiente figura:



Se sabe que:

- $\overleftrightarrow{BD}$ es bisectriz de $\angle CBA$ y de $\angle CDA$.
- $m\angle DAB = 2 \cdot m\angle AED$.

Entonces se puede afirmar con certeza que

(a) $CD = AE$.
(b) $AD < AE$.
(c) $CB = AE$.
(d) $DB < AE$.

Opción correcta: (a).

Solución:

Note que $\angle EAD = 180 - \angle DAB$ y por lo tanto como $m\angle DAB = 2 \cdot m\angle AED$ entonces se deduce que el $\triangle EAD$ es isósceles. Así, $AD = AE$. Luego, como $\overleftrightarrow{BD}$ es bisectriz de $\angle CBA$ y de $\angle CDA$, por criterio $a.l.a$, se tiene que $\triangle CBD \cong \triangle ABD$, entonces $CD = DA$ y por lo tanto $CD = AE$.

12. Dos panaderos realizan cinco pasteles en tres horas. Manteniendo este ritmo de trabajo, el martes trabajan durante siete horas seis panaderos, luego se retiran cuatro panaderos y los restantes tres trabajan dos horas más. La cantidad de pasteles que realizaron el martes corresponde a

    (a) 30
    (b) 35
    (c) 40
    (d) 45

    Opción correcta: (c)

    Solución:

    Primero averiguaremos cuantos pasteles hace un panadero en una hora. 2 panaderos hacen 5 pasteles en 3 horas.

    1 panadero hace $5 \div 2$ de pastel en 3 horas.

    1 panadero hace $5 \div 6$ de pastel en 1 hora.

    Ahora necesitamos saber cuántos pasteles realizaron seis panaderos en siete horas.

    1 panadero hace $5 \div 6$ de pastel en 1 hora.

    6 panaderos hace 5 de pasteles en 1 hora.

    6 panaderos hace 35 de pasteles en 7 horas.

    Ahora necesitamos saber cuántos pasteles realizaron tres panaderos en dos horas.

    1 panadero hace $5 \div 6$ de pastel en 1 hora.

    3 panaderos hace $5 \div 2$ de pastel en 1 hora.

    3 panaderos hace 5 de pastel en 2 horas.

    Entonces el martes se realizaron 40 pasteles en total.

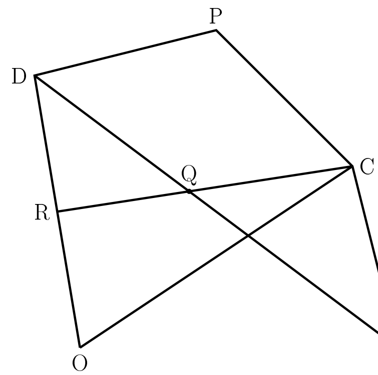
13. Emanuel vende caramelos en su pulpería. El precio de cada caramelo es un número entero. Luis tiene una cantidad de dinero que le permite comprar exactamente 12 caramelos rojos, o 14 verdes, o 15 azules, o n del tipo morado. Si los caramelos morados cuestan 20 colones, entonces ¿cuál es el menor valor de n de manera que esto sea posible?

    (a) 15
    (b) 18
    (c) 21
    (d) 24

    Opción correcta: (c)

    Solución: Como la cantidad de dinero que tiene Luis alcanza para comprar exactamente 12 caramelos de un tipo, 14 de otro, o 15 de otro, entonces la cantidad de dinero que tiene Luis debe ser divisible por 12, 14, y por 15. En particular debe ser divisible por el mínimo común múltiplo de estos números, que es 420. Vemos que si Luis tiene 420 colones, le alcanza para comprar 21 caramelos morados, por tanto 21 es el mínimo valor de n.

14. En la figura que se muestra, $\angle PDO = \angle BCR = 90°$, $\angle RQB = 2\angle COD$, $\angle COD = 2\angle CBD$, $DO = 1$ y $\overleftrightarrow{PO}$ es una bisectriz del ángulo COD. La medida de $\overline{PO}$ corresponde a



(a) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

(b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

Opción correcta: (a)

Solución:

Por el teorema del ángulo externo se tiene que $\angle RQB = \angle BCR + \angle CBD = 90° + \angle CBD$. Además, dado que $\angle RQB = 2\angle COD$ y $\angle COD = \angle CBD$, entonces $\angle RQB = 4\angle CBD$, de donde se sigue que $90° + \angle CBD = 4\angle CBD$ y así $\angle CBD = 30°$.

Entonces $\angle COD = 60°$, y como PO es bisectriz del $\angle COD$, entonces $\angle POD = 30°$, por lo que se concluye que $\triangle PDO$ es semiequilátero. Así, se tiene que $PD = \frac{PO}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle PDO$ se tiene que $(PO)^2 = \left(\frac{PO}{2}\right)^2 + 1^2$, de donde $PO = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

15. Sea S el conjunto de números primos entre 100 y 200. ¿Cuál es la probabilidad de que si se escoge un número al azar de S, este sea mayor que 117?

    (a) $\frac{17}{21}$

    (b) $\frac{21}{100}$

    (c) $\frac{4}{25}$

    (d) $\frac{16}{21}$

    Opción correcta: (d)

    Solución:

    Los números primos entre 101 y 200 corresponden:

101	103	107
109	113	127
131	137	139
149	151	157
163	167	173
179	181	191
193	197	199

De estos son mayores a 117:

127	131	137	139
149	151	157	163
167	173	179	181
191	193	197	199

Como son 21 números primos entre 101 y 200, además hay 16 números primos mayores que 117 y menores que 200, la probabilidad que sea primo mayor que 117 corresponde $\frac{16}{21}$.

16. Yerlin lanza un dado y anota el resultado, luego repite este proceso dos ocasiones más. Con los tres números que anotó realiza la siguiente operación: los que son pares los suma y luego resta los que son impares y obtiene un resultado; por ejemplo, si los números que obtiene son $6, 3$ y 5 la operación sería $6 - 3 - 5$ y el resultado -2. La probabilidad de que Yerlin obtenga un 0 en el resultado es:

    (a) $\frac{1}{54}$

    (b) $\frac{1}{18}$

    (c) $\frac{1}{12}$

    (d) $\frac{1}{9}$

    Opción correcta: (c)

    Solución:
    En total al tener tres lanzamientos del dado tenemos $6 \times 6 \times 6$ combinaciones posible de resultados. Ahora contemos los casos favorables en los cuales la operación daría cero. Caso 1: Tener los resultados $4, 1, 3$ este se puede presentar de 6 maneras distintas que son $1, 3, 4$; $1, 4, 3$; $3, 1, 4$; $3, 4, 1$; $4, 1, 3$ y $4, 3, 1$. Caso 2: Tener los resultados $6, 5, 1$ análogo al caso anterior, este se puede presentar de 6 maneras distintas. Caso 3: Tener los resultados $1, 1, 2$ este se puede presentar de 3 maneras distintas que son $1, 1, 2$; $1, 2, 1$; $2, 1, 1$. Caso 4: Tener los resultados $3, 3, 6$ este se puede presentar de 3 maneras distintas. En total son 18 casos favorables. La probabilidad sería: $\frac{18}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{12}$

17. Sea x un número entero tal $m = |(x+1)^2 - 4|$. La cantidad de valores de x para los cuales m es un numero primo corresponde a:

    (a) Uno
    (b) Dos
    (c) Tres
    (d) Cuatro

    Opción correcta: (d)

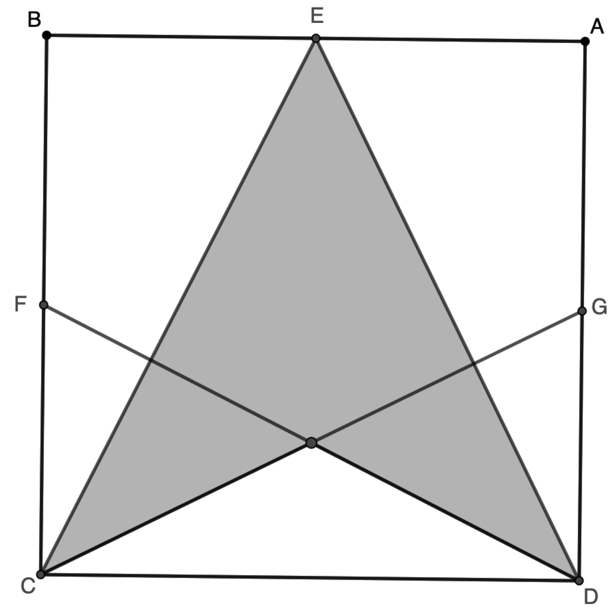
    Solución:

    Factorizando m se tiene que $m = |(x+1-2)(x+1+2)| = |(x-1)(x+3)| = |x-1||x+3|$ Como queremos que m sea primo, alguno de estos dos factores debe ser 1 y el otro un primo.

    Caso 1: $|x-1| = 1$ y $|x+3|$ es primo. $|x-1| = 1 \longrightarrow x = 0$ o bien $x = 2$ Si $x = 0$ $\longrightarrow |x+3| = |0+3| = 3$ el cual es primo. Si $x = 2 \longrightarrow |x+3| = |2+3| = 5$ el cual es primo.

    Caso 2: $|x+3| = 1$ y $|x-1|$ es primo. $|x+3| = 1 \longrightarrow x = -4$ o bien $x = -2$. Si $x = -4$ $\longrightarrow |x-1| = |-4-1| = 5$ el cual es primo. Si $x = -2 \longrightarrow |x-1| = |-2-1| = 3$ el cual es primo. Los valores posibles de x son $-4, -2, 0, 2$

18. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ con G, F y E los puntos medios de los lados DA, BC y CD respectivamente. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?



(a) $\frac{3}{4}$

(b) $\frac{3}{8}$

(c) $\frac{5}{8}$

(d) $\frac{7}{16}$

Opción correcta: (b)

Solución:

Note que $(CED) = \frac{1}{2}(ABCD)$. Si se denota con M la interseccion de CG y FD, entonces $(CMD) = \frac{1}{2}(FCD)$. Pero además, $(FCD) = \frac{1}{2}(CFGD)$, es decir se tiene que $(CMD) = \frac{1}{4}(CFGD)$. Y como $(CFGD) = \dfrac{1}{2}(ABCD)$, entonces se concluye que $(CMD) = \frac{1}{8}(ABCD)$. Por tanto la fracción que está sombreada corresponde $1/2 - 1/8 = 3/8$.

19. El Olcomaratón es una competencia matemática que se realiza una vez al año con personas destacadas de cada región, la competencia consta de M eventos y este año participaron 3 estudiantes, Andrea, Bruno y Catalina. Al ganador de cada evento se le asigna un puntaje de p_1, al segundo lugar se le asigna p_2 y al tercer lugar p_3 con $p_1 > p_2 > p_3 > 0$ y p_1, p_2, p_3 números enteros. Se sabe que Catalina hizo 22 puntos, además Andrea y Bruno empataron a 9 puntos. Andrea ganó el evento de Geometría. ¿Cuántos eventos tiene el Olcomaratón?

    (a) 2
    (b) 3
    (c) 4
    (d) 5

    Opción correcta: (d)

    Solución:

    El puntaje de cada uno de los eventos es $e = p_1 + p_2 + p_3$, además dado que ningún jugador se queda sin puntuar entonces la cantidad total de puntos es de $M \cdot e = 40$ que resulta de la suma de los puntajes de los participantes 22+9+9=40. Como Catalina (en adelante C) ganó la competencia pero Andrea (en adelante A) ganó un evento, quiere decir que $M \geq 2$, además $e \geq 1 + 2 + 3 = 6$. Entonces las posibilades para Me son:

    - $M = 2$, $e = 20$ Como A ganó el primer evento y A y Bruno (en adelante B) tienen el mismo puntaje, B tuvo que ganar un evento, esto contradice el hecho que C tenga el mayor puntaje puesto que no ganó ningún evento.
    - se descarta la posibilidad que $M = 3$ por no ser divisor de 40.
    - $M = 4$, $e = 10$ Como A ganó un evento, el mayor valor de p_1 es $p_1 = 9 - 3 = 6$, siendo así el mayor puntaje que puede obtener catalina ganando los otros 3 eventos y quedando segunda en el evento que ganó A es $C = 3 \cdot 6 + 3 = 21$ que contradice el puntaje obtenido por A.
    - $M = 5$, $e = 8$ cantidad de eventos correcta asignando el puntaje $p_1 = 5$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$.

20. ¿Para cuántos valores diferentes de k se tiene que el polinomio

$$x^2 + kx + 36$$

tiene dos raíces enteras diferentes?

(a) 6
(b) 8
(c) 9
(d) 14

Opción correcta: (b)

Solución: Observe que $x^2 + kx + 36$ admite dos raíces enteras si y solamente si

$$x^2 + kx + 36 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

donde α y β son números enteros. Comparando coeficientes obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -k \\ \alpha\beta &= 36 \end{aligned}$$

Entonces solo requerimos que explorar todas las formas de escribir 36 como producto de enteros diferentes. Estas son:

$$\pm 1 \times \pm 36,\ \pm 2 \times \pm 18,\ \pm 3 \times \pm 12,\ \pm 4 \times \pm 9,$$

los correspondientes valores para k son:

$$k \in \{\pm 37, \pm 20, \pm 15, \pm 13\}.$$

Por lo tanto hay 8 valores posibles para k.