XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

*MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT*

# Enunciados
# Primera Eliminatoria Nacional

## Nivel III
## (10°, 11° y 12°)

2023

Estimado estudiante:
La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2023 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

**www.olcoma.ac.cr**

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | segmento de extremos $A$ y$B$ | $\angle ABC \cong \angle DEF$ | congruencia de ángulos |
| $AB$ | medida de $\overline{AB}$ | $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ | congruencia de triángulos |
| $\overrightarrow{AB}$ | rayo de extremo $A$ y que contiene a $B$ | $ABC \leftrightarrow DEF$ | correspondencia de puntos |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | recta que contiene los puntos $A$ y $B$ | $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ | semejanza de triángulos |
| $\angle ABC$ | ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ | $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | congruencia de segmentos |
| $m\angle ABC$ | medida de $\angle ABC$ | $\widehat{AB}$ | arco de extremos $A$ y $B$ |
| $\triangle ABC$ | triángulo de vértices $A$, $B$, $C$ | $m\widehat{AB}$ | medida de $\widehat{AB}$ |
| $\square ABCD$ | cuadrilátero de vértices $A$, $B$, $C$, $D$ | $(ABC)$ | área de $\Delta ABC$ |
| $\parallel$ | paralelismo | $(ABCD)$ | área de $\square ABCD$ |
| $\perp$ | perpendicularidad | $P-Q-R$ | $P$, $Q$, $R$ puntos colineales, con $Q$ entre $P$ y $R$. |

1. Una persona recibe una beca estudiantil de forma mensual y la gasta completamente (durante el mes) comprando 50 helados. En un determinado mes los precios aumentaron 25 %. En respuesta a esto las becas son aumentadas, pero la persona se da cuenta que ahora solo puede comprar 48 helados al mes. Determine el porcentaje de aumento de la beca.

   (a) 14 %

   (b) 17 %

   (c) 20 %

   (d) 23 %

2. En una tómbola se han colocado 1500 bolitas numeradas del 1 al 1500, de manera que cada uno de los números aparece en alguna de las bolitas. ¿Cuál es la menor cantidad de bolitas que se debe tomar al azar, para garantizar que los números en dos de ellas sumen 2023?

   (a) 1001

   (b) 1012

   (c) 1023

   (d) 1034

3. Entre los enteros positivos menores que 100, hay cinco de ellos cuya cantidad de divisores positivos es máxima. Cuatro de ellos son 60, 72, 84 y 96. El quinto número con la cantidad máxima de divisores es

   (a) 48

   (b) 66

   (c) 78

   (d) 90

4. Sean $a$, $b$, $c$, y $d$ números reales que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 3$. Con respecto al valor de la expresión $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, se puede afirmar con certeza que

   (a) es menor que 6

   (b) es igual a 6

   (c) es igual a 9

   (d) es mayor que 9

5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar tres dados, el producto de los resultados sea un número par?

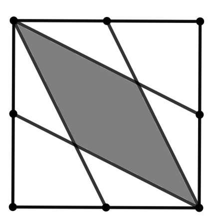
   (a) 1/8

   (b) 3/8

   (c) 5/8

   (d) 7/8

6. Considere un cuadrado y los puntos medios de sus lados. Al trazar los segmentos que unen dos vértices opuestos del cuadrado con los puntos medios de los lados se forma la región en la figura. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa el área sombreada?



   (a) 1/4

   (b) 1/3

   (c) 2/7

   (d) 2/5

7. Dados dos números reales, se define la operación $a \bigcirc b$, que se lee como "$a$ cachete $b$", mediante $a \bigcirc b = a + b - ab$. Por ejemplo, $5 \bigcirc \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Considere las siguientes proposiciones.

   (i) Si $a$ es un número real, entonces existe otro número real $b$ tal que $a \bigcirc b = 0$.

   (ii) Si $a \bigcirc b = 1$, entonces $a = 1$ ó $b = 1$.

   (iii) Para cualesquiera $a, b, c$ números reales se cumple que $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

   Con certeza, se puede afirmar que son siempre verdaderas:

   (a) Solo la (i).

   (b) La (i) y la (iii).

   (c) La (ii) y la (iii).

   (d) Solo la (iii).

8. Considere la sucesión de números

$$11 \cdot 1 + 5, \quad 11 \cdot 2 + 5, \quad 11 \cdot 3 + 5, \quad \ldots \quad , \quad 11 \cdot 2023 + 5.$$

   La cantidad de números que son divisibles por 6 es igual a

   (a) 335

   (b) 336

   (c) 337

   (d) 338

9. Los números de Aileen son números de 5 dígitos divisibles por 99, que además cumplen las siguientes propiedades:

   - el dígito de las unidades es igual al digito de las unidades de millar,
   - el dígito de las decenas es igual al digito de las decenas de millar.

   Determine la cantidad de números de Aileen.

   (a) 9

   (b) 10

   (c) 15

   (d) 16

10. Carlos escoge tres dígitos distintos no nulos y escribe todos los números de tres cifras que se pueden formar con ellos, sin repetir los dígitos en un mismo número. Luego de escribir estos números, calcula la suma de todos ellos. La cantidad de resultados posibles (para esta suma) que son menores o iguales que 2023 es igual a

    (a) 4

    (b) 5

    (c) 6

    (d) 7

11. Carlos dibuja en la pizarra un rectángulo con lados $a$ y $b$. Al calcular el área el resultado es igual a 8. Al restar 2 a uno de los lados y sumar 2 al otro, el área obtenida es ahora igual a 16. Entonces la suma de las áreas de los cuadrados de lados $a$ y $b$ es igual a

    (a) 32

    (b) 42

    (c) 52

    (d) 62

12. En una bolsa se encuentran 2023 tarjetas numeradas $1, 2, 3, \ldots, 2023$, de manera que cada uno de los 2023 números aparece en alguna de las tarjetas. Sin ver en la bolsa, Ana saca dos tarjetas distintas y suma los números escritos en ellas. Sea $P$ la probabilidad de que esta suma sea par y sea $I$ la probabilidad de que esta suma sea impar. Entonces se puede afirmar que

    (a) $P < I$

    (b) $P = I$

    (c) $P > I$

    (d) no es posible establecer una relación entre $P$ e $I$.

13. Se tiene un numero de dos cifras $xy$ que cumple con lo siguiente:

    - Cuando se le suma 2 se obtiene un número con dígitos $ab$.
    - Cuando se multiplica por 2 se obtiene un número con dígitos $ba$.

    La suma $x + y$ de este número corresponde a

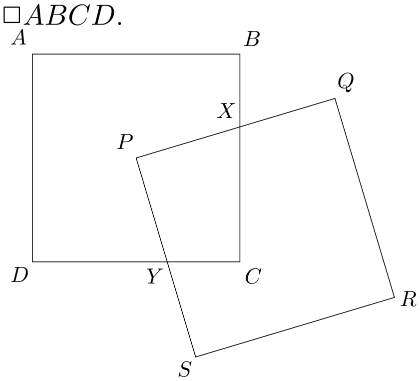
    (a) 7

    (b) 9

    (c) 11

    (d) 13

14. Considere dos cuadrados idénticos $\square ABCD$ y $\square PQRS$ de lado $\ell$. El punto $P$ se coloca en el centro del cuadrado $\square ABCD$.




Entonces se puede afirmar con certeza que

(a) $(PXCY) < \dfrac{\ell^2}{4}$.

(b) $m\angle YPC = m\angle CPX$.

(c) El área del polígono que contiene los puntos $C, Y, S, R, Q$ y $X$ es $\dfrac{3\ell^2}{4}$.

(d) $CX = CY$.

15. En 1989 se organizó la primera edición de OLCOMA, de manera que en el 2023 se celebra la edición 35. Decimos que la edición $N$ de OLCOMA es *amigable* si el máximo divisor común de $N$ y del año en que se realiza la edición correspondiente es mayor que 1. Por ejemplo, la edición 35 es amigable porque el máximo divisor común de 35 y 2023 es 7, pero la edición 15 no es amigable porque el máximo divisor común de 15 y 2003 (el año correspondiente a la edición 15) es 1. De las primeras 35 ediciones, la cantidad de ediciones amigables es igual a

(a) 20

(b) 22

(c) 24

(d) 26

16. El valor de la suma alternada de cuadrados

$$-2000^2 + 2001^2 - 2002^2 + 2003^2 - \ldots - 2022^2 + 2023^2$$

es igual a

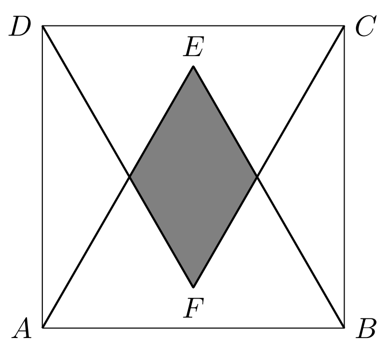
(a) 44000

(b) 44276

(c) 48276

(d) 48552

17. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado uno, se escogen puntos $E$ y $F$ dentro del cuadrado de tal forma que $AEB$ y $CFD$ son triángulos equiláteros. Determine el área de la región sombreada.



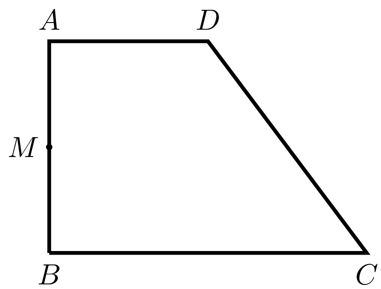

(a) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

(b) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

(c) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

(d) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

18. En la siguiente figura (no hecha a escala), $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo con $m\angle ABC = \angle DAB = 90°$. En este trapecio se cumple que si $M$ es el punto medio de $AB$, entonces $MC$ y $MD$ son bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle ADC$, respectivamente. Si $MC = 4$ y $MD = 2$, entonces el área de $\square ABCD$ corresponde a




    (a) $3\sqrt{5}$
    (b) $4\sqrt{5}$
    (c) 6
    (d) 8

19. La probabilidad de que, al lanzar tres dados, la suma del resultado de dos de ellos sea el resultado del dado restante es

    (a) 1/6
    (b) 13/72
    (c) 7/36
    (d) 5/24

20. En la sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, los dos primeros términos son iguales a 1 y, en adelante, cada término posterior es la suma de los dos anteriores; por ejemplo, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$, $13 = 5 + 8$ y así sucesivamente. Denotamos por $F_n$ al $n$-ésimo término de esta sucesión; por ejemplo, los primeros términos son $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $\ldots$. Con base en lo anterior, determine el valor de la fracción $(F_{2020}^2 + F_{2023}^2)/(F_{2021}^2 + F_{2022}^2)$.

   (a) $3/2$

   (b) $23/20$

   (c) $2$

   (d) $3$