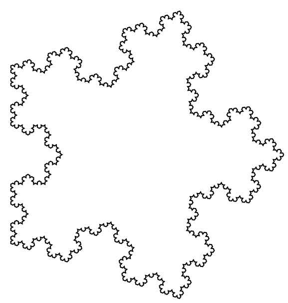
XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Soluciones
Primera Eliminatoria Nacional



Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2023

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2023 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. Una persona recibe una beca estudiantil de forma mensual y la gasta completamente (durante el mes) comprando 50 helados. En un determinado mes los precios aumentaron 25 %. En respuesta a esto las becas son aumentadas, pero la persona se da cuenta que ahora solo puede comprar 48 helados al mes. Determine el porcentaje de aumento de la beca.

   (a) 14 %
   (b) 17 %
   (c) 20 %
   (d) 23 %

   Opción correcta: (c).

   Solución: Sean b y p los valores originales de la beca y el precio del helado. De esta forma tenemos que $b/p = 50$. Suponga que la beca de la persona aumentó en $x\,\%$. De esta forma los nuevos valores de la beca y del precio del helado son $b(1+x/100)$ y $p(1+0,25)$. Por lo tanto,

$$\frac{b(1+x/100)}{p(1+0{,}25)} = 48 \Longrightarrow 50 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 48 \cdot 1,25 = 60 \Longrightarrow 50 + \frac{x}{2} = 60.$$

   Al resolver esta última ecuación obtenemos que $x = 20$, es decir, el aumento de la beca fue de 20 % .

2. En una tómbola se han colocado 1500 bolitas numeradas del 1 al 1500, de manera que cada uno de los números aparece en alguna de las bolitas. ¿Cuál es la menor cantidad de bolitas que se debe tomar al azar, para garantizar que los números en dos de ellas sumen 2023?

   (a) 1001
   (b) 1012
   (c) 1023
   (d) 1034

   Opción correcta: (b)

   Solución: Empezamos encontrado las parejas de números que suman 2023:

$$\{1500, 523\}, \quad \{1499, 524\}, \quad \ldots \quad \{1012, 1011\}.$$

   La cantidad de estas parejas es igual a $1500 - 1012 + 1 = 489$.

   Observamos que hay una forma de sacar $522 + 489 = 1011$ bolitas sin que dos de ellas sumen 2023; por ejemplo, considere el conjunto de las bolitas

$$\{1, 2, 3, \ldots, 1011\}.$$

   En este caso, la mayor suma de dos de estas bolitas es $1010 + 1011 < 2023$.

   Finalmente, vamos a mostrar que tomando 1012 bolitas es posible encontrar dos cuya suma sea 2023. De las 1012 bolitas, claramente hay a lo sumo 522 que pertenecen al conjunto $\{1, 2, \ldots, 522\}$; por lo tanto, hay al menos $1012 - 522 = 490$ que no pertenecen al conjunto $\{1, 2, \ldots, 522\}$, es decir, que pertenecen al conjunto $\{523, 524, \ldots, 1500\}$. Dado que hay al menos 490 de estos elementos y anteriormente se dio una agrupación de estos elementos en 489 parejas disjuntas, debe haber al menos una pareja en la cual las dos bolitas hayan sido tomadas, con lo cual se obtiene que la suma es 2023, y así concluye el problema.

3. Entre los enteros positivos menores que 100, hay cinco de ellos cuya cantidad de divisores positivos es máxima. Cuatro de ellos son 60, 72, 84 y 96. El quinto número con la cantidad máxima de divisores es
   (a) 48

   (b) 66

   (c) 78

   (d) 90

   Opción correcta: (d)

   Solución: Empezamos factorizando los números del problema

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 96 = 2^5 \cdot 3,$$

$$48 = 2^4 \cdot 3, \quad 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, \quad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13, \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

   Si $d(n)$ denota la cantidad de divisores de n, entonces con lo anterior obtenemos que

$$d(60) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12, \quad d(72) = (3+1)(2+1) = 12,$$

$$d(84) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12, \quad d(96) = (5+1)(1+1) = 12,$$

$$d(48) = (4+1)(1+1) = 10, \quad d(66) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8,$$

$$d(78) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8, \quad d(90) = (1+1)(2+1)(1+1) = 12.$$

   Por lo tanto, el quinto número es 90.

   Solución alternativa: Sabemos que si $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es la factorización prima de n, entonces su cantidad de divisores $d(n)$ es igual a $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)$. De esta manera es posible ver que $d(60) = d(72) = d(84) = d(96) = 12$. Para que un número tenga 12 divisores, entonces se debe cumplir que $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1) = 12$. Las formas de expresar 12 como un producto de enteros positivos mayores que 1 son

$$12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

   Esto implica que las posibilidades para la factorización prima de un número con 12 divisores son

$$p_1^{11}, \quad p_1^5 \cdot p_2, \quad p_1^3 \cdot p_2^2, \quad p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3.$$

   Finalmente analizamos los casos:

   a) $n = p_1^{11}$: el menor valor es $2^{11} > 100$.

   b) $n = p_1^5 \cdot p_2$: el menor valor es $2^5 \cdot 3 = 96$, que ya fue considerado, y cualquier otro ejemplo es mayor o igual que $2^5 \cdot 5 > 100$ y $3^5 \cdot 2 > 100$.

   c) $n = p_1^3 \cdot p_2^2$: el menor valor es $2^3 \cdot 3^2 = 72$, que ya fue considerado, y cualquier otro ejemplo es mayor o igual que$2^3 \cdot 5^2 > 100$ y $3^3 \cdot 2^2 > 100$.

   d) $n = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3$: si todos los primos son mayores que 2, entonces el menor valor es $3^2 \cdot 5 \cdot 7 > 100$. Por lo tanto, alguno de los primos es igual a 2. Si $p_1 = 2$, entonces $p_2 \cdot p_3 < 25$, con lo cual se obtienen $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, que ya fueron considerados. Si $p_2 = 2$, entonces $p_1^2 \cdot p_3 < 50$, con lo cual se obtiene $3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$.

4. Sean a, b, c, y d números reales que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 3$. Con respecto al valor de la expresión $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, se puede afirmar con certeza que

   (a) es menor que 6

   (b) es igual a 6

   (c) es igual a 9

   (d) es mayor que 9

   Opción correcta: (c)

   Solución: Empezamos observando que

   $$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2) = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2.$$

   Esta última expresión se puede factorizar como

   $$a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

   con lo que concluimos que el valor de la expresión es igual a 9.

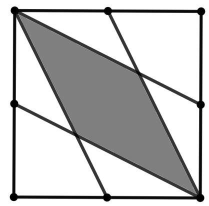
5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar tres dados, el producto de los resultados sea un número par?

   (a) 1/8
   (b) 3/8
   (c) 5/8
   (d) 7/8

   Opción correcta: (d)

   Solución: Es más sencillo calcular la cantidad de formas en la que pasa que el producto de los resultados sea un número impar. En efecto, para que esto suceda los resultados en los tres dados tienen que ser números impares. Por tanto el resultado de cada dado tiene que ser un número en el conjunto $\{1, 3, 5\}$. Luego el número de configuraciones es $3^3 = 27$. Concluimos que la probabilidad de obtener un número impar es $3^3/6^3 = 1/8$. Por tanto la probabilidad de que el producto sea un número par es $1 - 1/8 = 7/8$.

6. Considere un cuadrado y los puntos medios de sus lados. Al trazar los segmentos que unen dos vértices opuestos del cuadrado con los puntos medios de los lados se forma la región en la figura. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa el área sombreada?



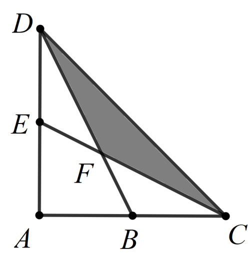
   (a) 1/4

   (b) 1/3

   (c) 2/7

   (d) 2/5

- Opción correcta: (b)
- Solución: Como la figura es simétrica (con respecto a cualquiera de sus dos diagonales), entonces podemos calcular la fracción en alguna de estas mitades. Considere la figura:



Si l es el lado del cuadrado, entonces podemos asignar coordenadas de la siguiente manera:

$$A = (0,0), \quad B = (l/2, 0), \quad C = (l, 0), \quad D = (0, l), \quad E = (0, l/2).$$

Para calcular el área sombreada de la nueva figura vamos a calcular el área blanca. En este caso, el área total (del triángulo ACD) es $l^2/2$, y el área blanca se puede calcular como la suma de las áreas de los triángulos ACE y DEF. El área del triángulo ACE es fácil de calcular:

$$(ACE) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}.$$

Para calcular el área DEF vamos a encontrar la altura de F sobre la base DE, es decir, necesitamos encontrar la coordenada x de F. Para hacer esto empezamos escribiendo las ecuaciones de las rectas BD y CE:

$$\text{recta } BD: \quad y = \frac{0 - l}{l/2 - 0} \cdot (x - l/2) = -2x + l, \qquad \text{recta } CE: \quad y = \frac{0 - l/2}{l - 0} \cdot (x - l) = \frac{-x + l}{2}.$$

Por lo tanto, si $F = (x, y)$, entonces se cumple que

$$-2x + l = \frac{-x + l}{2} \Longrightarrow -4x + 2l = -x + l \Longrightarrow 3x = l \Longrightarrow x = \frac{l}{3}.$$

Tenemos que

$$(BCF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{l^2}{12} \Longrightarrow (CDF) = (ACD) - (ACE) - (DEF) = \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{6}.$$

Con esto concluimos que la fracción del cuadrada que cubre el área sombreada es

$$\frac{(CDF)}{(ACD)} = \frac{l^2/6}{l^2/2} = \frac{1}{3}.$$

Solución alternativa: Considere la figura como en la solución anterior. Note que BD y CE son medianas del triángulo, y es conocido que las medianas se intersecan en razón $2:1$. Por lo tanto, la altura desde F a DE es igual a $AB \cdot 2/3 = l/3$. Con esto se puede concluir como en el problema anterior.

Solución alternativa: Considere la figura como en la solución anterior. Se puede usar el hecho que como F es el punto de intersección de las medianas del triángulo ACD, entonces las tres áreas $(ACF), (CDF), (ADF)$ son iguales, con lo que se concluye que el área sombreada es $1/3$ del total.

7. Dados dos números reales, se define la operación $a \bigcirc b$, que se lee como "a cachete b", mediante $a \bigcirc b = a + b - ab$. Por ejemplo, $5 \bigcirc \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Considere las siguientes proposiciones.

   (i) Si a es un número real, entonces existe otro número real b tal que $a \bigcirc b = 0$.

   (ii) Si $a \bigcirc b = 1$, entonces $a = 1$ ó $b = 1$.

   (iii) Para cualesquiera a, b, c números reales se cumple que $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

   Con certeza, se puede afirmar que son siempre verdaderas:

   (a) Solo la (i).

   (b) La (i) y la (iii).

   (c) La (ii) y la (iii).

   (d) Solo la (iii).

   Opción correcta: (c)

   Solución: Primero observamos que si $a \bigcirc b = 0$, entonces

$$a + b - ab = 0 \Longrightarrow ab - b = a \Longrightarrow b(a-1) = a \Longrightarrow b = \frac{a}{a-1}.$$

   Notamos que el procedimiento anterior es correcto, excepto si $a = 1$ (pues la última división no sería válida). De hecho, si $a = 1$, entonces se cumple que $1 \bigcirc b = 1 + b - 1 \cdot b = 1 \neq 0$ para cualquier número real b, por lo que (i) es falsa.

   Ahora consideramos la ecuación $a \circ b = 1$. En este caso tenemos que

$$a + b - ab = 1 \Longrightarrow ab - a - b + 1 = 0 \Longrightarrow a(b-1) - (b-1) = 0 \Longrightarrow (a-1)(b-1) = 0,$$

   con lo cual concluimos que en este caso se debe tener $a = 1$ o $b = 1$; es decir, (ii) es verdadera.

   Finalmente, para la tercera proposición vamos a hacer el cálculo de ambas expresiones por separado:

$$\begin{aligned}(a \bigcirc b) \bigcirc c &= (a + b - ab) \bigcirc c \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab) \cdot c \\ &= (a + b - ab) + c - (ac + bc - abc) = a + b + c - (ab + ac + bc) + abc,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \bigcirc (b \bigcirc c) &= a \bigcirc (b + c - bc) \\ &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + (b + c - bc) - (ab + ac - abc) = a + b + c - (ab + ac + bc) + abc,\end{aligned}$$

   con lo cual concluimos que (iii) es verdadera.

8. Considere la sucesión de números

$$11 \cdot 1 + 5, \quad 11 \cdot 2 + 5, \quad 11 \cdot 3 + 5, \quad \ldots \quad , \quad 11 \cdot 2023 + 5.$$

La cantidad de números que son divisibles por 6 es igual a

(a) 335
(b) 336
(c) 337
(d) 338

Opción correcta: (c)

Solución:

Observe que los números son de la forma $11k + 5$, donde $1 \leq k \leq 2023$ y k es entero. Por otro lado,

$$11k + 5 = (6 + 5)k + 5 = 6k + 5k + 5 = 6k + 5(k + 1).$$

Claramente 6 divide $6k$, para cualquier valor de k, pero 6 y 5 son primos relativos, de modo que necesariamente 6 debe dividir $k+1$. En consecuencia, debemos tener que $6n = k+1$ y $k = 6n-1$. Luego, los valores de k son

$$5, 11, 17, \ldots, 2015, 2021.$$

El primero se obtiene para $n = 1$ y el último para $n = 337$. Por lo tanto la cantidad es 337.

9. Los números de Aileen son números de 5 dígitos divisibles por 99, que además cumplen las siguientes propiedades:

   - el dígito de las unidades es igual al digito de las unidades de millar,
   - el dígito de las decenas es igual al digito de las decenas de millar.

   Determine la cantidad de números de Aileen.

   (a) 9
   (b) 10
   (c) 15
   (d) 16

   Opción correcta: (b)

   Solución: Según las condiciones, estos números son de la forma *bacba* para a, b, c dígitos, y $b \neq 0$. Para que este número sea divisible por 11, debemos tener que 11 divida a la suma alternada de dígitos $b - a + c - b + a$. Esta suma es igual a c, por lo que el único valor posible de c es 0.

   Ahora, para que este número sea divisible por 9, debemos tener que $b + a + 0 + b + a = 2a + 2b = 2(a + b)$ sea divisible por 9. Como 2 y 9 no tienen divisores en común, entonces 9 debe dividir a $a + b$. Como $b \neq 0$, entonces la suma $a + b$ está entre 1 y 18, con lo cual obtenemos que la suma debe ser igual a 9 o 18. Si la suma es 18, la única solución es $a = b = 9$. Si la suma es 9, entonces las posibilidades para el par (a, b) son

$$\{(0,9),(1,8),\ldots,(7,2),(8,1)\}.$$

   Esto da 9 soluciones nuevas, con lo cual se obtienen en total 10 soluciones.

10. Carlos escoge tres dígitos distintos no nulos y escribe todos los números de tres cifras que se pueden formar con ellos, sin repetir los dígitos en un mismo número. Luego de escribir estos números, calcula la suma de todos ellos. La cantidad de resultados posibles (para esta suma) que son menores o iguales que 2023 es igual a

   (a) 4
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 7

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Sean a, b y c los dígitos. Los números que Carlos escribe son $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. El número con dígitos xyz expresado en notación desarrollada es $100x + 10y + z$. Por lo tanto, al considerar la suma de los seis números, obtenemos $222(a + b + c)$.

   El mínimo valor posible para la suma $a + b + c$ es $1 + 2 + 3$, con lo cual la suma de los números escritos es $6 \cdot 222 = 1332$. De igual forma, si $a + b + c = 7$ entonces el resultado es 1554, si $a + b + c = 8$ entonces el resultado es 1776, si $a + b + c = 9$ el resultado es 1998. Sin embargo, si $a + b + c \geq 10$ entonces el resultado es por lo menos 2220. Por lo tanto solo hay 4 resultados posibles para la suma de los números escritos.

   Nota: Aunque los resultados son 4 hay 7 formas diferentes de obtenerlos. Esto es usando $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 5)$ y $(2, 3, 4)$.

11. Carlos dibuja en la pizarra un rectángulo con lados a y b. Al calcular el área el resultado es igual a 8. Al restar 2 a uno de los lados y sumar 2 al otro, el área obtenida es ahora igual a 16. Entonces la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b es igual a

    (a) 32
    (b) 42
    (c) 52
    (d) 62

    Opción correcta: (c)

    Solución: Dado que la hipótesis $ab = 8$ y la cantidad buscada $a^2 + b^2$ son expresiones simétricas con respecto a a y b, entonces podemos suponer que el lado al que se le resta es a y al que se le suma es b. Por lo tanto, podemos suponer que $(a-2)(b+2) = 16$. Luego,

    $$(a-2)(b+2) = 16 \Longrightarrow ab + 2a - 2b - 4 = 16 \Longrightarrow 2(a-b) = 16 - 8 + 4 \Longrightarrow a - b = 6.$$

    Elevando al cuadrado se obtiene que

    $$(a-b)^2 = 36 \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 36 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52.$$

    Nota: Como $a = b + 6$, entonces $ab = 8$ implica que $(b+6)b = 8$. Luego, $a = \sqrt{17} + 3$ y $b = \sqrt{17} - 3$. De donde se puede calcular directamente $a^2 + b^2$.

12. En una bolsa se encuentran 2023 tarjetas numeradas $1, 2, 3, \ldots, 2023$, de manera que cada uno de los 2023 números aparece en alguna de las tarjetas. Sin ver en la bolsa, Ana saca dos tarjetas distintas y suma los números escritos en ellas. Sea P la probabilidad de que esta suma sea par y sea I la probabilidad de que esta suma sea impar. Entonces se puede afirmar que

    (a) $P < I$

    (b) $P = I$

    (c) $P > I$

    (d) no es posible establecer una relación entre P e I.

    Opción correcta: (a)

    Solución: En primer lugar, observemos que la suma de Ana siempre es par o impar, por lo que $P + I = 1$. Esto quiere decir que es suficiente determinar uno de los valores para conocer el otro. En lo que sigue vamos a calcular I y posteriormente P.

    Ahora notamos que la cantidad de parejas de tarjetas (sin importa el orden) que Ana puede sacar es $2023 \cdot 2022/2 = 2023 \cdot 1011$, pues la primera tarjeta puede ser cualquiera de las 2023, la segunda cualquiera de las 2022 restantes, y el factor 2 se debe al hecho que no importa el orden en que se saquen.

    Las parejas de tarjetas que Ana debería sacar para que la suma sea impar deberían ser de paridades distintas, es decir, una debería tener escrito un número par y la otra un número impar. La cantidad de números pares en las tarjetas $(2, 4, \ldots, 2022)$ es 1011 y la cantidad de números impares en las tarjetas $(1, 3, \ldots, 2023)$ es 1012. Por lo tanto, la cantidad de parejas de tarjetas con paridades distintas es $1011 \cdot 1012$.

    De esta forma, la probabilidad de que Ana obtenga una suma impar es igual a

    $$I = \frac{1011 \cdot 1012}{2023 \cdot 1011} = \frac{1012}{2023}.$$

    Esto implica que $P = 1 - I = (2023 - 1012)/2023 = 1011/2023$, con lo cual concluimos que $P < I$.

13. Se tiene un número de dos cifras xy que cumple con lo siguiente:

- Cuando se le suma 2 se obtiene un número con dígitos ab.
- Cuando se multiplica por 2 se obtiene un número con dígitos ba.

La suma $x + y$ de este número corresponde a

(a) 7
(b) 9
(c) 11
(d) 13

Opción correcta: (c)

Solución: Empezamos expresando los números en notación desarrollada: $xy = 10x + y$, $ab = 10a + b$, $ba = 10b + a$. De esta forma tenemos que

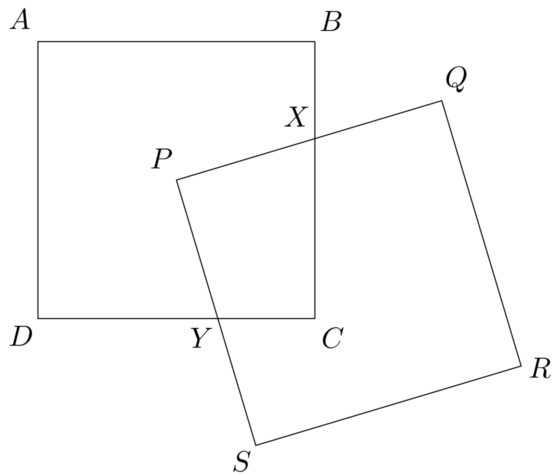
$$10x + y + 2 = 10a + b, \quad 2 \cdot (10x + y) = 10b + a.$$

Con base en lo anterior, obtenemos que

$$2 \cdot (10a + b - 2) = 10b + a \Longrightarrow 20a + 2b - 4 = 10b + a \Longrightarrow 19a = 8b + 4 = 4(2b + 1).$$

En particular, la última relación implica que 19 divide a $2b + 1$. Sin embargo, para $0 \leq b \leq 9$ tenemos que $1 \leq 2b+1 \leq 19$, con lo cual la única posibilidad es que $2b+1 = 19$. Esto implica que $b = 9$ y por lo tanto $a = 4$. Finalmente, $xy = ab-2 = 49-2 = 47$, con lo cual $x+y = 4+7 = 11$.

14. Considere dos cuadrados idénticos $\square ABCD$ y $\square PQRS$ de lado ℓ. El punto P se coloca en el centro del cuadrado $\square ABCD$.



Entonces se puede afirmar con certeza que

(a) $(PXCY) < \dfrac{\ell^2}{4}$.

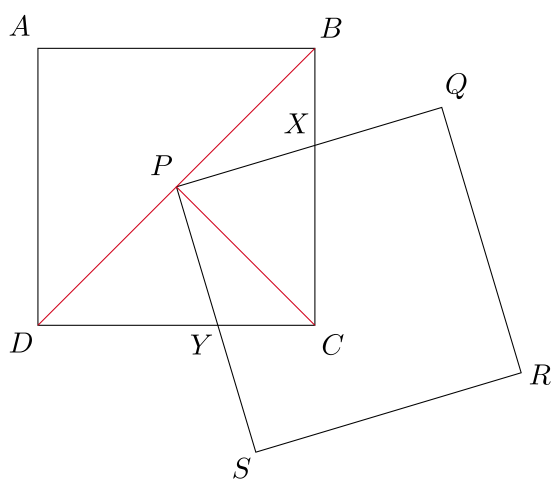
(b) $m\angle YPC = m\angle CPX$.

(c) El área del polígono que contiene los puntos C, Y, S, R, Q y X es $\dfrac{3\ell^2}{4}$.

(d) $CX = CY$.

Opción correcta: (c).

Solución:



Se tiene que $m\angle YCP = m\angle PBX = 45°$. Además, como

$$m\angle DPC = m\angle YPX = m\angle CPB = 90°,$$

entonces se concluye que $m\angle YPC = m\angle XPB$. Como P está ubicado en el centro de $\square ABCD$ entonces $PC = PB$. Por el criterio ALA se tiene que los triángulos $\triangle YPC$ y $\triangle XPB$ son congruentes. Así, $(PXCY) = \frac{\ell^2}{4}$, de donde se concluye que el área del polígono que contiene los puntos C, Y, S, R, Q y X es $\frac{3\ell^2}{4}$.

Finalmente, la opción $(PXCY) < \frac{\ell^2}{4}$ se descarta porque hay igualdad; asimismo, variando el cuadrado $\square PQRS$ se observa que ninguna de las relaciones $m\angle YPC = m\angle CPX$ y $CX = CY$ es cierta en general.

15. En 1989 se organizó la primera edición de OLCOMA, de manera que en el 2023 se celebra la edición 35. Decimos que la edición N de OLCOMA es *amigable* si el máximo divisor común de N y del año en que se realiza la edición correspondiente es mayor que 1. Por ejemplo, la edición 35 es amigable porque el máximo divisor común de 35 y 2023 es 7, pero la edición 15 no es amigable porque el máximo divisor común de 15 y 2003 (el año correspondiente a la edición 15) es 1. De las primeras 35 ediciones, la cantidad de ediciones amigables es igual a

    (a) 20

    (b) 22

    (c) 24

    (d) 26

    Opción correcta: (a)

    Solución: Empezamos observando que el año en que se realiza la edición N es $1988 + N$. Por lo tanto, si N y $1988+N$ comparten un divisor (es decir, si N es amigable), este divisor también lo comparte $(1988 + N) - N = 1988$. Conversamente, si N y 1988 comparten un divisor, entonces $1988 + N$ también lo comparte (por lo que N es amigable). Por lo tanto, para encontrar las ediciones amigables tenemos que encontrar cuáles ediciones N, $1 \leq N \leq 35$, comparten un divisor mayor que 1 con 1988. Además, es suficiente buscar cuáles N comparten un divisor primo con 1988.

    Observamos que $1988 = 2 \cdot 994 = 2^2 \cdot 497 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$. Los divisores primos menores que 35 son 2 y 7. De esta forma vemos que las 17 ediciones $\{2, 4, 6, \ldots, 34\}$ comparten (al menos) el divisor 2 con 1988, y las 5 ediciones $\{7, 14, 21, 28, 35\}$ comparten (al menos) el divisor 7 con 1988. Estas listas tienen en común los 2 números $\{14, 28\}$. Por lo tanto, la cantidad de ediciones que comparten un divisor con 1988, y por lo tanto son amigables, son $17 + 5 - 2 = 20$.

16. El valor de la suma alternada de cuadrados

$$-2000^2 + 2001^2 - 2002^2 + 2003^2 - \ldots - 2022^2 + 2023^2$$

es igual a

(a) 44000

(b) 44276

(c) 48276

(d) 48552

Opción correcta: (c)

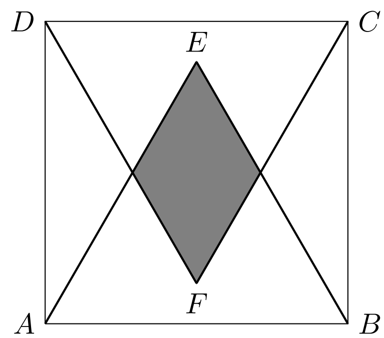
Solución: Podemos agrupar esta suma en parejas de cuadrados consecutivos y aplicar las fórmulas notables de diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} -(2000+n)^2 + (2000+n+1)^2 &= (-(2000+n) + (2000+n+1))((2000+n) + (2000+n+1)) \\ &= 1 \cdot (4000 + n + (n+1)) \\ &= 4000 + n + (n+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto la suma es igual a

$$\begin{aligned} &(4000+0+1) + (4000+2+3) + \ldots + (4000+22+23) \\ &= 12 \cdot 4000 + (1 + 2 + \ldots + 23) \\ &= 48000 + \frac{23 \cdot 24}{2} = 48000 + 23 \cdot 12 = 48000 + 276 = 48276. \end{aligned}$$

17. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado uno, se escogen puntos E y F dentro del cuadrado de tal forma que AEB y CFD son triángulos equiláteros. Determine el área de la región sombreada.



(a) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

(b) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

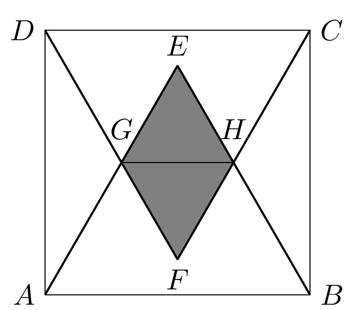
(c) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

(d) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

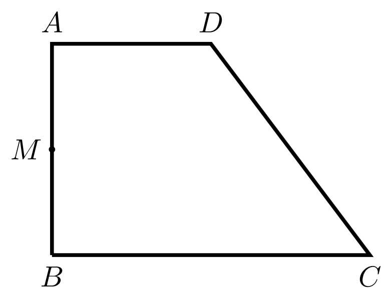
Opción correcta: (b)

Solución: Tome G y H los puntos de intersección de AE con DF y de EB con FC, respectivamente. Como $\angle GDA = \angle GAD = 30°$, el triángulo DGA es isóceles, y por lo tanto G está en la mediatriz de AD. De forma similar H está en la mediatriz de BC. Sin embargo, como $ABCD$ es un cuadrado, entonces las mediatrices de AD y BC son la misma recta, lo que implica que la recta GH es la mediatriz de los segmentos AD y BC. En particular, GH es paralela a AB, lo que nos dice que el triángulo GHE es similar al triángulo ABE, por lo que el triángulo GHE es equilátero.

La altura de E a AB mide $\sqrt{3}/2$, mientras que la distancia de GH a AB mide $1/2$, así concluimos que la altura del triángulo GHE mide $\sqrt{3}/2 - 1/2$, por lo que la longitud de sus lados es $1 - 1/\sqrt{3}$. De ahí concluimos que el área del triángulo GHE es $(1-1/\sqrt{3})^2\sqrt{3}/4 = (2\sqrt{3}-3)/6$. De forma análoga el triángulo GHF tiene la misma área, por lo que el área de la figura es $2 \cdot \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$.



18. En la siguiente figura (no hecha a escala), $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo con $m\angle ABC = \angle DAB = 90°$. En este trapecio se cumple que si M es el punto medio de AB, entonces MC y MD son bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle ADC$, respectivamente. Si $MC = 4$ y $MD = 2$, entonces el área de $\square ABCD$ corresponde a



(a) $3\sqrt{5}$
(b) $4\sqrt{5}$
(c) 6
(d) 8

Opción correcta: (d)

Solución:

Sea $h = AB$, de forma que $AM = BM = h/2$. Luego, como MC y MD son las respectivas bisectrices de los ángulos BCD y ADC, y $m\angle BCD + m\angle ADC = 180°$, entonces

$$m\angle MCD + m\angle MDC = \frac{1}{2}m\angle BCD + \frac{1}{2}m\angle ADC = 90°.$$

Por suma de ángulos en $\triangle MCD$, lo anterior implica que $m\angle CMD = 90°$ y por lo tanto $m\angle BMC + m\angle AMD = 90°$. Usando que $\square ABCD$ es un trapecio rectángulo (con lo cual $m\angle MAD = m\angle MBC = 90°$), obtenemos que $m\angle AMD = m\angle BCM$ y $m\angle ADM = m\angle BMC$. Con esto concluimos que $\triangle ADM \sim \triangle BMC$, y así deducimos que

$$\frac{AD}{BM} = \frac{AM}{BC} = \frac{DM}{CM}.$$

Usando que $MD = 2$, $MC = 4$ y $AM = BM = h/2$, obtenemos que $AD = h/4$ y $BC = h$. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo BCM se obtiene que

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + h^2 = 4^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{4 \cdot 16}{1+4} = \frac{64}{5}.$$

Finalmente, el área del trapecio es

$$\frac{1}{2}AB \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}h \cdot \left(\frac{h}{4} + h\right) = \frac{5h^2}{8} = 8.$$

19. La probabilidad de que, al lanzar tres dados, la suma del resultado de dos de ellos sea el resultado del dado restante es

    (a) $1/6$
    (b) $13/72$
    (c) $7/36$
    (d) $5/24$

    Opción correcta: (d)

    Solución: Llamamos a los dados A, B, y C. Observe que la cantidad de formas de que la suma de los resultados dos dados sea k es igual a $k-1$, pues se puede obtener como sumas

    $$1+(k-1)=2+(k-2)=\cdots=(k-1)+1.$$

    Por lo tanto, la cantidad de configuraciones de los tres dados tales que la suma de los dados A y B sea igual al número del dado C es igual a

    $$\sum_{k=1}^{6}(k-1)=15.$$

    Esto es análogo, para cuando la suma de los dados A y C sea igual al número del dado B, y cuando la suma de los dados B y C sea igual al número del dado A. Observe que estos casos son disjuntos entre sí; es decir, no es posible que la suma de los dados A y B dé el resultado en el dado C, y al mismo tiempo la suma de los resultados en los dados A y C sea el resultado del dado B. Por lo tanto, la cantidad de configuraciones donde la suma de dos dados da el tercero es $15\times 3=45$. Finalmente, la probabilidad buscada es $45/6^3=5/24$.

20. En la sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, los dos primeros términos son iguales a 1 y, en adelante, cada término posterior es la suma de los dos anteriores; por ejemplo, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$, $13 = 5 + 8$ y así sucesivamente. Denotamos por F_n al n-ésimo término de esta sucesión; por ejemplo, los primeros términos son $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $\ldots$. Con base en lo anterior, determine el valor de la fracción $(F_{2020}^2 + F_{2023}^2)/(F_{2021}^2 + F_{2022}^2)$.

    (a) 3/2

    (b) 23/20

    (c) 2

    (d) 3

    Opción correcta: (c)

    Solución: Los valores explícitos de $F_{2020}, \ldots, F_{2023}$ son difíciles de calcular manualmente, por lo que podemos hacer unos casos particulares más pequeños para intentar encontrar algún patrón:

$$\frac{F_1^2 + F_4^2}{F_2^2 + F_3^2} = \frac{1^2 + 3^2}{1^2 + 2^2} = \frac{10}{5} = 2, \qquad \frac{F_2^2 + F_5^2}{F_3^2 + F_4^2} = \frac{1^2 + 5^2}{2^2 + 3^2} = \frac{26}{13} = 2,$$

$$\frac{F_3^2 + F_6^2}{F_4^2 + F_5^2} = \frac{2^2 + 8^2}{3^2 + 5^2} = \frac{68}{34} = 2, \qquad \frac{F_4^2 + F_7^2}{F_5^2 + F_6^2} = \frac{3^2 + 13^2}{5^2 + 8^2} = \frac{178}{89} = 2.$$

Los ejemplos anteriores sugieren que todas estas fracciones son iguales a 2; vamos a demostrar que en efecto es así. Por la definición de la sucesión, para determinar los valores de F_{2020}, F_{2021}, F_{2022} y F_{2023} solo es necesario saber los de F_{2020} y F_{2021}. Sea $F_{2000} = a$ y $F_{2021} = b$, de tal manera que $F_{2022} = a + b$ y $F_{2023} = (a + b) + b = a + 2b$. Por lo tanto,

$$F_{2000}^2 + F_{2023}^2 = a^2 + (a + 2b)^2 = a^2 + (a^2 + 4ab + 4b^2) = 2(a^2 + 2ab + 2b^2),$$

$$F_{2021}^2 + F_{2022}^2 = b^2 + (a + b)^2 = b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + 2b^2.$$

A partir de lo anterior, podemos concluir que el valor de la fracción buscada es igual a 2.

Comentario: Los números $F_{2020}, \ldots, F_{2023}$ son muy grandes; por ejemplo, el número F_{2020} tiene 422 dígitos.