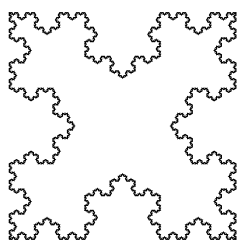
XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Soluciones
Segunda Eliminatoria Nacional



Nivel II

(8° y 9°)

2023

Estimado estudiante:
La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2023 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y dos de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

I Parte: Selección única. **Valor: 24 puntos, 2 puntos cada pregunta**

1. ¿Cuál es el mayor intervalo al que debe pertenecer b para que la ecuación $x^2-(a+1)x+(2b-a)=0$ tenga soluciones reales para cualquier valor real que tome a?

   (a) $]-\infty,-1]$
   (b) $[-1,+\infty[$
   (c) $\left[\frac{-4}{5},+\infty\right[$
   (d) $\left]-\infty,\frac{-4}{5}\right]$

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Para que la ecuación tenga soluciones reales debe cumplirse que su discriminante sea no negativo, es decir que:

   $$[-(a+1)]^2-4(2b-a)\geq 0 \Longrightarrow a^2+2a+1-8b+4a\geq 0$$
   $$\Longrightarrow a^2+6a+(1-8b)\geq 0.$$

   El polinomio anterior, considerado en variable a, es cuadrático no negativo y esto implica que a lo sumo tiene una solución real, por lo que su disciminante debe ser menor o igual que cero, es decir que:

   $$36-4(1-8b)\leq 0 \Longrightarrow 32+32b\leq 0$$
   $$\Longrightarrow b\leq -1.$$

   Por lo que el mayor intervalo al que debe pertenecer b corresponde a $]-\infty,-1]$.

2. ¿Cuántas parejas de números enteros (a, b), con $a \leq b$, satisfacen la condición que su producto es 7 veces su suma?

   (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 5

   Opción correcta: (c)

   Solución:

   La condición del problema es equivalente a que

$$ab = 7a + 7b.$$

por tanto

$$ab - 7a - 7b + 49 = 49$$

$$\Leftrightarrow (a-7)(b-7) = 49.$$

Como $a \leq b$, tenemos las siguientes posibilidades:

a) $a - 7 = -49$ y $b - 7 = -1$, de donde $a = -42$, y $b = 6$.

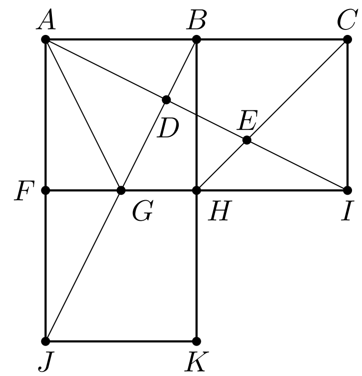
b) $a - 7 = -7$ y $b - 7 = -7$, de donde $a = 0$, y $b = 0$.

c) $a - 7 = 1$ y $b - 7 = 49$, de donde $a = 8$, y $b = 56$.

d) $a - 7 = 7$ y $b - 7 = 7$, de donde $a = 14$, y $b = 14$.

Por lo tanto existen 4 parejas que satisfacen la condición del enunciado.

3. Considere la siguiente figura formada por tres cuadrados de lado 1.



Entonces con seguridad, se puede afirmar que

(a) $(ADG) > (CEI)$
(b) $(FGJ) > (CEI)$
(c) $(FGJ) > (ADG)$
(d) $(ADG) > (FGJ)$

Opción correcta: (d)

Solución:

Primero, observe $FG = \frac{1}{2}$, pues las diagonales de $\square ABKJ$ se intersecan en el punto medio, que también es el punto medio de FH. Luego,

$$(FGJ) = \frac{FG \cdot FJ}{2} = \frac{1}{4}.$$

Por otro lado, observe que

$$(ABG) = \frac{AB \cdot AF}{2} = \frac{1}{2},$$

pero $(ABD) < \frac{1}{4}$. Por lo que

$$(AGD) = (ABG) - (ABD) > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Por último, si P es la intersección de BI y CH entonces se tiene que $(CEI) = (PEI) + (CPI)$. Además, la altura de P sobre CI mide $\frac{BC}{2}$. Luego

$$(CPI) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Por lo que

$$(CEI) = (PEI) + (CPI) > \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la única opción que se cumple con certeza es la (d).

4. Se sabe que si $x+y+z=0$ entonces

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Suponga que

$$\sqrt[6]{r}+\frac{1}{\sqrt[6]{r}}=3.$$

Entonces, el valor de $\dfrac{r^{\frac{1}{2}}+r^{-\frac{1}{2}}}{6}$ viene dado por

(a) 3

(b) 18

(c) 27

(d) 33

Opción correcta: (a)

Solución:

Observe que

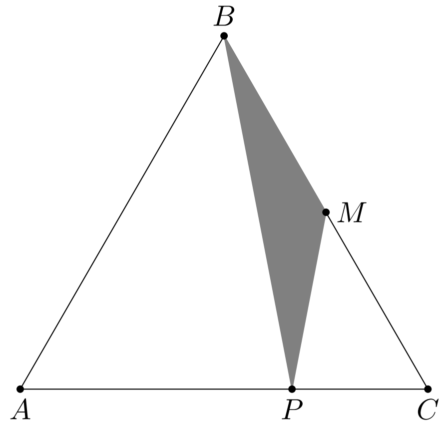
$$\sqrt[6]{r}+\frac{1}{\sqrt[6]{r}}-3=0.$$

Usando el resultado dado al inicio se tiene

$$\left(\sqrt[6]{r}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\right)^3+(-3)^3=3\cdot\sqrt[6]{r}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\cdot -3.$$

Donde se tiene que $\dfrac{r^{\frac{1}{2}}+r^{-\frac{1}{2}}}{6}=3$.

5. En la siguiente figura el $\triangle ABC$ es equilátero, M es el punto medio de $\overline{BC}$ y P es un punto tal que $A-P-C$. Si $m\angle APB = m\angle MPC$ ¿Qué fracción del área del $\triangle ABC$ está sombreada?



(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{5}{6}$

(d) $\frac{7}{12}$

Opción correcta: (a)

Solución:

Como el $\triangle ABC$ es equilátero, sus tres ángulos internos miden $60°$, en particular $m\angle BAC = m\angle BCA$ y dado que por hipótesis $m\angle APB = m\angle MPC$, se sigue que $\triangle ABP \sim \triangle CMP$ por criterio de semejanza AA. Además como M es punto medio de $\overline{BC}$ y $BC = AB$, entonces la razón de semejanza es

$$\frac{MC}{AB} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{1}{2} \Longrightarrow PA = 2PC.$$

Y como $AC = PA + PC \Longrightarrow AC = 3PC$ y $PA = \frac{2}{3}AC$. Como $\triangle ABC$ y $\triangle ABP$ tienen la misma altura, entonces

$$(ABP) = \frac{2}{3}(ABC). \tag{1}$$

Por otro lado, $\triangle ABP \sim \triangle CMP$ también se sigue que

$$\frac{(CMP)}{(ABP)} = \frac{1}{4} \Longrightarrow (CMP) = \frac{1}{4}(ABP) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(ABC) = \frac{1}{6}(ABC). \tag{2}$$

Entonces de (1) y (2) tenemos que

$$(ABP) + (CMP) = \frac{2}{3}(ABC) + \frac{1}{6}(ABC) = \frac{5}{6}(ABC)$$

.

De donde se concluye que el área sombreada corresponde al $\frac{1}{6}$ restante del (ABC).

6. ¿Cuántas parejas de números enteros positivos (a, b) existen tales que a y b son cuadrados perfectos y b es 144 unidades mayor que a?

   (a) Uno
   (b) Dos
   (c) Tres
   (d) Cuatro

   Opción correcta: (d)

   Solución:

   Si suponemos que $x^2 = a$ y $y^2 = b$ entonces y^2 es $x^2 + 144$.

   $y^2 - x^2 = 144$

   $(y - x)(y + x) = 144$

   Tomando $y - x$ y $y + x$ como valores positivos, se tienen 8 casos. Solucionaremos cada caso:

   - $y - x = 1$ y $y + x = 144$. Solucionando se tiene que y no es entero por lo cual se descarta.
   - $y - x = 2$ y $y + x = 72$. Solucionando se tiene que $y = 37$ y $x = 35$, lo que conlleva a que $a = 1225$ y $b = 1369$.
   - $y - x = 3$ y $y + x = 48$. Solucionando se tiene que y no es entero por lo cual se descarta.
   - $y - x = 4$ y $y + x = 36$. Solucionando se tiene que $y = 20$ y $x = 16$, lo que conlleva a que $a = 256$ y $b = 400$.
   - $y - x = 6$ y $y + x = 24$. Solucionando se tiene que $y = 15$ y $x = 9$, lo que conlleva a que $a = 81$ y $b = 225$.
   - $y - x = 8$ y $y + x = 18$. Solucionando se tiene que $y = 13$ y $x = 5$, lo que conlleva a que $a = 25$ y $b = 169$.
   - $y - x = 9$ y $y + x = 16$. Solucionando se tiene que y no es entero por lo cual se descarta.
   - $y - x = 12$ y $y + x = 12$. Solucionando se tiene que $y = 12$ y $x = 0$ pero a es positivo, este caso se descarta.

   Tomando $y - x$ y $y + x$ como valores negativos, se tienen 8 casos que poseen las mismas soluciones de parejas de a y b.

   Finalmente se tiene cuatro combinaciones de a y b.

7. Diana nació entre el año 1900 y 1999. Ella sumó los dgítos del año de su nacimiento y descubrió que es cuatro veces la suma de los dígitos del año en que cumplió 30. La suma de los dígitos del año en que nació Diana corresponde a:

   (a) 16
   (b) 20
   (c) 24
   (d) 28

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Primero observe que el dígito de las unidades tanto en el año de nacimiento como en el del cumpleaños 30 es el mismo.

   Si Diana nació antes de 1969, entonces se debe tener que $10+a+b = 4(13+a+b)$ y esta igualdad es imposible que se cumpla tomando en cuenta que a y b están entre 0 y 9. No pudo haber nacido es 1969, pues no se cumple que la suma de los dígitos sea 4 veces la suma de los dígitos de 1999. Por tanto nació después de 1969.

   Diana nació en $19ab$ y cumple en $20db$. Note que si $a = 7$, entonces $d = 0$, si $a = 8$, entonces $d = 1$ y si $a = 9$, entonces $d = 2$.

   Caso 1. $a = 7$ y $d = 0$

   Entonces nació en $197b$ y cumple en $200b$.

   Aplicando la condición se tiene que $1 + 9 + 7 + b = 4(2 + 0 + 0 + b)$, de lo que se sigue que $b = 3$ y el nace en el 1973.

   Caso 2. $a = 8$ y $d = 1$

   Entonces nació en $198b$ y cumple en $201b$.

   Aplicando la condición se tiene que $1 + 9 + 8 + b = 4(2 + 0 + 1 + b)$, de lo que se sigue que $b = 2$ y el nace en el 1982.

   Caso 3. $a = 9$ y $d = 2$

   Entonces nació en $199b$ y cumple en $202b$

   Aplicando la condición se tiene que $1 + 9 + 9 + b = 4(2 + 0 + 2 + b)$, de lo que se sigue que $b = 1$ y el nace en el 1991.

   En todos los casos la suma de los dígitos del año de nacimiento es 20.

8. La suma de los dígitos del número

$$n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{9\ldots9}_{321 \text{ veces}}$$

corresponde a

(a) 327
(b) 342
(c) 729
(d) 1084

Opción correcta: (b)

Solución:
Note que:

$$\begin{aligned}
9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{9\ldots9}_{321 \text{ veces}} &= (9+1) - 1 + (99+1) - 1 + (999+1) - 1 + ... + (\underbrace{9\ldots9}_{321 \text{ veces}} + 1) - 1 \\
&= (1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{321}) - 322 \\
&= \underbrace{1\ldots1}_{322 \text{ veces}} - 322 \\
&= \underbrace{1\ldots1}_{318 \text{ veces}} 0789.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la suma de los dígitos de n es $1 \times 318 + 7 + 8 + 9 = 342$.

9. Charlene tiene cinco cartas rojas con los números del 1 al 5 en ellas, y cuatro cartas azules con los números del 3 al 6. Ella ordena todas las cartas de forma que los colores queden alternados y que el número en cada carta azul sea divisible por el número en cada uno de sus vecinos rojos. ¿Cuál es la suma de los números anotados en las tres cartas del medio?

   (a) 9
   (b) 10
   (c) 11
   (d) 12

   Opción correcta: (d)

   Solución:

   Observe que el único múltiplo de 5 entre 3 y 6 es 5. Por lo tanto hay una carta roja con un 5 en uno de los extremos. La siguiente debe ser azul con un 5 y la que sigue una roja con un 1. Similarmente al otro extremo debe quedar $2, 4, 4$. Completando el orden de las cartas debe ser:

$$5R, 5A, 1R, 3A, 3R, 6A, 2R, 4A, 4R.$$

   Por lo tanto la suma de las tres cartas en el medio es $3 + 3 + 6 = 12$.

10. Sea $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos que se intersecan perpendicularmente. Entonces se puede afirmar con certeza que

   (a) $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$
   (b) $BD^2 = BC^2 + AB^2$
   (c) $AC^2 - AD^2 = BD^2 - BC^2$
   (d) $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Sea M el punto de intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Entonces, se obtienen los siguientes triángulos rectángulos $\triangle AMC$,$\triangle AMD$, $\triangle BMC$ y $\triangle BMD$, todos rectos en M. De lo anterior y usando Pitágoras se obtiene que

   a) $AC^2 = AM^2 + CM^2$.
   b) $AD^2 = AM^2 + MD^2$.
   c) $BC^2 = CM^2 + MB^2$.
   d) $BD^2 = DM^2 + MB^2$.

   Restando las ecuaciones a) y b) y las ecuaciones c) y d) se obtiene respectivamente

   - $AC^2 - AD^2 = CM^2 - MD^2$.
   - $BC^2 - BD^2 = CM^2 - MD^2$.

   De lo anterior se tiene claramente que $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

11. Un grupo de personas se encuentran un duende en los bosques de Prusia en Cartago, que les promete entregar sus monedas de oro si resuelven el siguiente acertijo : Mi tesoro lo repartiré en partes iguales, al primero le daré 9 monedas más $\frac{1}{9}$ de lo que quede, luego al segundo 18 monedas más $\frac{1}{9}$ de lo que quede, al tercero 27 monedas más $\frac{1}{9}$ de lo que quede, y así sucesivamente. Según la información anterior, la cantidad de personas que conformaban el grupo corresponde a

    (a) 5
    (b) 6
    (c) 7
    (d) 8

    Opción correcta (d)

    Solución:

    Sea x la cantidad total de monedas, a la primera persona el daría $9+\frac{1}{9}(x-9)=9+\frac{x}{9}-1=8+\frac{x}{9}=\frac{72+x}{9}$ por lo que quedarían $x-\left(8+\frac{x}{9}\right)=-8+\frac{8x}{9}$.
    La segunda persona le corresponde $18+\frac{1}{9}\left(-8+\frac{8x}{9}-18\right)=18+\frac{1}{9}\left(\frac{-234+8x}{9}\right)=18+\frac{-234+8x}{81}=\frac{1224+8x}{81}$
    Como todas la personas recibieron lo mismo

$$\frac{72+x}{9}=\frac{1224+8x}{81}$$
$$\frac{648+9x}{81}=\frac{1224+8x}{81}$$
$$x=576.$$

    Por lo que cada uno recibe 72 monedas y por tanto hay 8 personas.

12. Alicia, Beatriz, Carlos, Diana y Eduardo están sentados afuera de Olcoma, esperando para que comience una clase de Combinatoria. Mientras llega el profesor Oscar, deciden jugar un juego. Se van levantando, en orden alfabético, pero escogiendo siempre de izquierda a derecha. Por ejemplo, si están sentados en el orden Beatriz, Diana, Alicia, Carlos y Eduardo, en la primera vuelta se levanta Ana, en la segunda se levanta Beatriz y Carlos, en la tercera se levantan Diana y Eduardo, y el juego termina. Entonces la cantidad total de formas en las que pueden estar sentados, de modo que el juego termine en exactamente dos turnos corresponde a

    (a) 12
    (b) 24
    (c) 26
    (d) 32

    Opción correcta: (c)

    Solución:

    Como el juego debe terminar en dos turnos, entonces se deben levantar primero k, donde

    $1 \leq k \leq 4$, y en el siguiente turno se levantan los demás. En este caso, una vez que se escogen los k del primer turno, hay que ubicarlos en las posiciones en orden alfabético, para esto se escoge k lugares de los 5 que hay. Una vez que se ha ubicado los primeros k, los demás deben ubicar un lugar específico en los espacios que quedan, es decir, el orden queda totalmente determinado al ubicar los primeros k. Para $k = 1$ hay 5 opciones para ubicar a A, pero debe eliminarse la opción $ABCDE$, pues en este caso solo se ocupa un paso, por lo que hay 4. Si $k = 2$ hay $\frac{5 \cdot 4}{2} - 1 = 10 - 1 = 9$. Si $k = 3$ hay $\frac{5 \cdot 4}{2} - 1 = 9$, finalmente si $k = 4$ hay 4 opciones. En total son $4 + 9 + 9 + 4 = 26$.

II Parte: Desarrollo. Valor: 14 puntos, 7 puntos cada pregunta

1. Ana, Bruno, Carol, Diego y Elena se encuentra 27 monedas de oro y deciden organizar un torneo de ajedrez para repartir el tesoro. Cada persona debe competir con las demás una sola vez. En cada partida, el o la que gane recibe tres monedas y si pierde no recibe nada, pero si quedan tablas (empate) cada quien recibe una moneda. Se sabe que Ana ganó tres veces y no perdió, Bruno obtuvo tanto monedas como lo que obtuvieron Carol y Diego juntos, Carol ganó y perdió exactamente una vez, mientras que Diego obtuvo tres monedas. Al final del torneo lo que sobró (en caso de que sobre) se lo dieron a la persona menos afortunada. ¿Cuántas veces ganó, perdió, y empató Elena?

   Solución:

   Note que cada persona compite cuatro veces y según la información:

   - Ana ganó tres veces y no perdió, por tanto tiene un empate para un total 10 monedas.
   - Carol ganó y perdió una vez, por tanto empató 2 veces, para un total de 5 monedas.
   - Diego obtuvo 3 monedas por tanto Bruno ganó 8 monedas.
   - Como Bruno obtuvo 8 monedas debe tener 2 victorias y 2 empates, pues no es posible que con una victoria, o menos, alcance

   Con lo cual completamos la siguiente tabla:

Personas	Monedas	Ganes	Derrotas	Tablas (empates)
Ana	10	3	0	1
Bruno	8	2	0	2
Carol	5	1	1	2
Diego	3			
Elena				

   Note que cuando una persona gana la otra pierde por lo tanto la cantidad de ganes y derrotas son iguales, además la cantidad de empates es par (2 por partida que quede en tablas).

   Como Diego ganó 3 monedas se tienen los siguientes casos:

   - Diego gana una vez y pierde tres veces.

Personas	Monedas	Ganes	Derrotas	Tablas (empates)
Ana	10	3	0	1
Bruno	8	2	0	2
Carol	5	1	1	2
Diego	3	1	3	0
Elena				

     Note que, sin contar a Elena, hay 7 victorias y hay 4 derrotas, por lo que ella debe necesariamente tener 3 derrotas y 0 victorias (en total 7 victorias y 7 derrotas). Esto implica que debe tener un empate y recibir una moneda. Esta opción es posible como se muestra en la siguiente table

	Ana	Bruno	Carol	Diego	Elena
Ana	-	1	3	3	3
Bruno	1	-	1	3	3
Carol	0	1	-	3	1
Diego	0	0	0	-	3
Elena	0	0	1	0	-

donde el número en la fila i y columna j indica cuantos puntos obtuvo el jugador i al enfrentar al jugador j. En este caso vemos que Elena no gana ninguna partida y empata exactamente una.

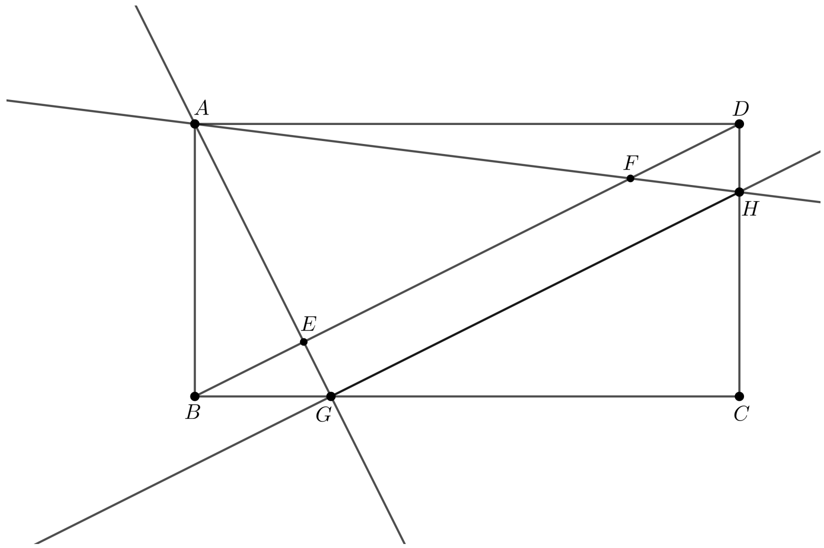
- Diego pierde una vez y empata tres veces.

Personas	Monedas	Ganes	Derrotas	Tablas (empates)
Ana	10	3	0	1
Bruno	8	2	0	2
Carol	5	1	1	2
Diego	3	0	1	3
Elena				

Del mismo modo, sin contar a Elena, hay 6 victorias y hay 2 derrotas, por lo que ella debe necesariamente tener 4 derrotas y 0 victorias. Esto implica que Elena pierde en su juego contra Diego, pero estamos suponiendo que Diego no gana ninguna partida, y esto es una contradicción. Por tanto este caso no es posible.

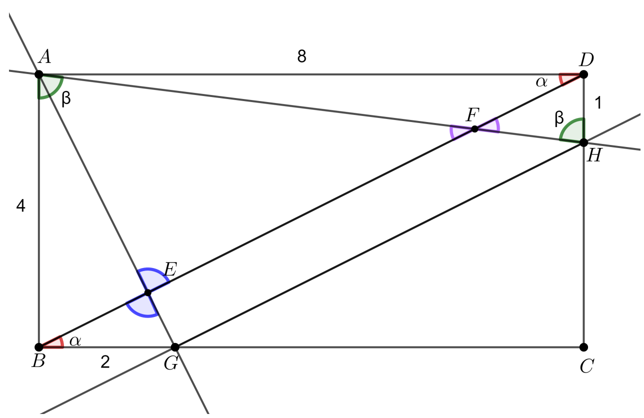
Entonces se sabe con certeza que Elena no ganó ninguna partida, y empató exactamente una vez.

2. Considere la siguiente figura:



El $\square ABCD$ es un rectángulo, con $AD = 8$ y $AB = 4$. Los puntos E y F están en la diagonal $\overline{BD}$, G y H son puntos en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, tal que $A - E - G$ y $A - F - H$ respectivamente, además $BG = 2$ y $DH = 1$. Determine $\dfrac{GH}{EF}$.

Solución:



Los ángulos marcados como α son congruentes por ser alternos internos entre paralelas, es decir $\angle CBD \cong BDA$. Por la misma justificación tenemos los marcados como β, $\angle DHA \cong BAH$. Además, $\angle BEG \cong DEA$, y $\angle DFH \cong AFB$ por ser opuestos por el vértice. Se tiene entonces que $\triangle BEG \sim \triangle DEA$ y $\triangle DFH \sim \triangle BFA$ por el criterio ángulo ángulo.

$\triangle BEG \sim \triangle DEA \Longrightarrow \dfrac{EG}{EA} = \dfrac{BG}{DA} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

$\triangle DFH \sim \triangle BFA \Longrightarrow \dfrac{FH}{FA} = \dfrac{DH}{BA} = \dfrac{1}{4}$

Entonces se tiene que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{FH}{FA} = \dfrac{1}{4}$, y por el teorema de tales se concluye que $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$.

De lo anterior se tiene que $\angle AEF \cong AGH$ y $\angle EAF \cong GAH$, entonces $\triangle EAF \sim \triangle GAH$ por el criterio ángulo ángulo. Así, $\dfrac{AG}{EA} = \dfrac{GH}{EF}$, y dado que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{1}{4}$, entonces
$\dfrac{AG}{EA} = \dfrac{EA + EG}{EA} = 1 + \dfrac{EG}{EA} = \dfrac{5}{4}$
Finalmente $\dfrac{AG}{EA} = \dfrac{GH}{EF} = \dfrac{5}{4}$