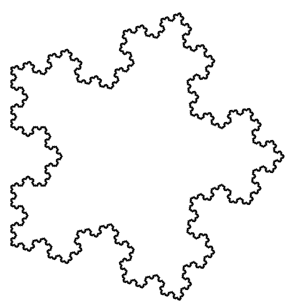
XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Soluciones
Segunda Eliminatoria Nacional



Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2023

Estimado estudiante:
La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2021 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única, y dos de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

I Parte: Selección única. **Valor: 24 puntos, 2 puntos cada pregunta**

1. Considere las siguientes proposiciones

   (I) El número $19 \cdot 37$ tiene más divisores positivos que $19 + 37$.

   (II) El número $2^{19} + 2^{37}$ tiene más divisores positivos que 37^{19}.

   Podemos decir que

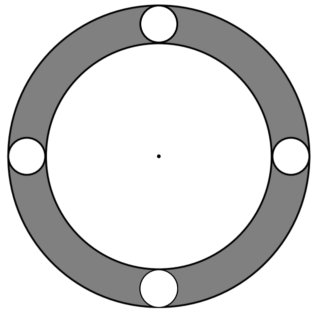
   (a) ambas afirmaciones son verdaderas.
   (b) (I) es verdadera y (II) falsa.
   (c) (II) es verdadera y (I) falsa.
   (d) ambas afirmaciones son falsas.

   Opción correcta: (c)

   Solución: Observe que $19 \cdot 37$ tiene cuatro divisores. Mientras que $19 + 37 = 56 = 2^3 \cdot 7$, se deduce que tiene ocho divisores. La proposición I es falsa.

   Por otro lado, 37^{19}, se deduce que tiene 20 divisores, y, $2^{19} + 2^{37} = 2^{19}(1 + 2^{21})$ tiene al menos $20 \cdot 2$ divisores.

2. A una arandela se le hicieron cuatro huecos circulares, los cuales forman circunferencias tangentes a los bordes de la arandela, tal y como se muestra en la siguiente figura. Si el radio de la arandela mide 2 cm y el radio del hueco del centro mide 1,5 cm, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $\dfrac{\pi}{2}$ cm^2

(b) $\dfrac{5\pi}{2}$ cm^2

(c) $\dfrac{3\pi}{2}$ cm^2

(d) $\dfrac{5\pi}{4}$ cm^2

Opción correcta: (c)

Solución: El área de la arandela es $\pi[2^2 - (1,5)^2] \approx 5,5$ cm^2. El radio de cada uno de los cuatro huecos mide $0,25$ cm, por lo que el área de cada uno es de $0,2$ cm^2. Entonces, el área sombreada es de $5,5 - 0,8 = 4,7$ cm ^{2}.

3. Ana escribe una secuencia de 78 números, iniciando por $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \cdots$
Según la secuencia, el número que ocupa la posición 70 corresponde a

   (a) $\dfrac{3}{4}$

   (b) $\dfrac{4}{5}$

   (c) $\dfrac{5}{6}$

   (d) $\dfrac{6}{7}$

Solución: opción b) $\dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$

Note que hay una fracción con numerador 1, dos con numerador 2, y en general hay k fracciones con de numerador k. Por lo tanto, la cantidad de fracciones corresponde a $1+2+3+\cdots+k = 78$, es decir $\dfrac{k(k+1)}{2} = 78$, lo que significa que $k(k+1) = 156 = 12 \times 13$, con lo cual $k = 12$. De lo anterior tenemos que las últimas 12 fracciones tienen numerador 12, la primera de ellas $\dfrac{12}{12}$ ocupa la posición 67 $(78 - 12 = 66)$ y en la posición 70 tenemos a la fracción $\dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

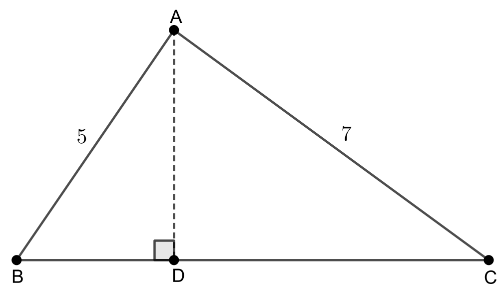
4. En la figura adjunta se presenta un triángulo ABC, donde $AB = 5$, $AC = 7$ y $DC = 2BD$, según los datos, el valor de $\cos(A)$ corresponde a

   (a) $\dfrac{5}{35}$

   (b) $\dfrac{7}{35}$

   (c) $\dfrac{1}{35}$

   (d) $\dfrac{12}{35}$



Solución: opción c) $\dfrac{1}{35}$

Solución

Sea $AD = h$ y $BD = x$, por el teorema de Pitágoras $h^2 = 5^2 - x^2 = 7^2 - (2x)^2$, con lo cual $3x^2 = 24$ y $x = \sqrt{8}$. Por lo tanto $BC = 3\sqrt{8}$.

Por otra parte aplicando ley de cosenos se tiene que $(3\sqrt{8})^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(A)$

$$72 = 74 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(A)$$

$$35 \cos(A) = 1$$

$$\cos(A) = \frac{1}{35}$$

.

5. Sean x y y números reales diferentes de cero. Si $x^2 + y^2 = xy + 2$ entonces la expresión $\left[2^{x-y} \cdot 2^{\frac{y^2}{x+y}}\right]^x \cdot \left[2^{y-x} \cdot 2^{\frac{x^2}{x+y}}\right]^y$ es equivalente a

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 16

   Opción correcta (b)

   Solución:

$$\left[2^{x-y} \cdot 2^{\frac{y^2}{x+y}}\right]^x \cdot \left[2^{y-x} \cdot 2^{\frac{x^2}{x+y}}\right]^y =$$
$$\left[2^{x-y+\frac{y^2}{x+y}}\right]^x \cdot \left[2^{y-x+\frac{x^2}{x+y}}\right]^y =$$
$$\left[2^{\frac{x^2}{x+y}}\right]^x \cdot \left[2^{\frac{y^2}{x+y}}\right]^y =$$
$$2^{\frac{x^3}{x+y}} \cdot 2^{\frac{y^3}{x+y}} =$$
$$2^{\frac{x^3+y^3}{x+y}} =$$
$$2^{\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}} = 2^{x^2-xy+y^2}$$

   Pero como $x^2 + y^2 = xy + 2$ entonces $x^2 + y^2 - xy = 2$ con lo cual

$$2^{x^2-xy+y^2} = 2^2 = 4.$$

6. En un reloj analógico, las agujas de las horas y los minutos se mueven de forma continua a velocidad constante (aunque las dos velocidades son distintas). Entre las 12:00 a.m. y las 12:00 p.m., la cantidad de veces que las agujas son perpendiculares entre sí es igual a
   (a) 11
   (b) 12
   (c) 22
   (d) 24

   Opción correcta: (c)

   Solución: La velocidad de la aguja de los minutos es 1 vuelta por hora, mientras que la de los horas es 1/12 vuelta por hora. Por lo tanto, la velocidad de la aguja de los minutos relativa a la velocidad de la aguja de las horas es igual a $(1 - 1/12) = 11/12$ vueltas por hora. Esto quiere decir que en un lapso de 12 horas, la aguja de los minutos completa 11 vueltas alrededor de la aguja de las horas. En cada una de estas 11 vueltas hay dos momentos en que las agujas son perpendiculares, con lo cual concluimos que la cantidad de veces que las agujas van a ser perpendiculares entre sí es 22.

7. Maricruz compró 23 chocolates y 11 confites y pagó 990 colones. El precio de cada chocolate y de cada confite es un número entero. Además, el precio de cada chocolate es mayor que el de un confite. Entonces el precio de un chocolate más el de un confite es

   (a) 46
   (b) 54
   (c) 55
   (d) 60

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Sea x el precio de los chocolates y y el precio de los confites. Entonces x y y son enteros positivos y $x > y > 0$. De acuerdo con la información del enunciado se cumple que $23x + 11y = 990$, en particular, $23x = 990 - 11y = 11(90 - y)$. Como 23 y 11 son primos relativos entonces 11 divide x y 23 divide $90 - y$. En consecuencia $x = 11k$ y $90 - y = 23k$, es decir,

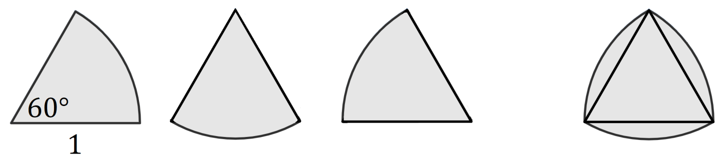
$$x = 11k, \qquad y = 90 - 23k,$$

   donde k es entero. Como $x > y > 0$, al probar los valores $k = 1, 2, 3, 4$ se obtienen los siguientes valores de x y y.

k	x	y
1	11	67
2	22	44
3	33	21
4	44	-2

   de donde se observa que la única opción posible es $x = 33$ y $y = 21$. En cuyo caso $x + y = 54$.

8. En la figura a la izquierda, se muestran tres sectores circulares de radio 1 y ángulo 60°; a la derecha, se muestra una región que resulta al traslapar (colocar uno encima del otro) estos tres sectores.



Si el área de esta región se denota por A y el área de un círculo de diámetro 1 se denota por B, entonces se puede afirmar que

(a) $A < B$

(b) $A = B$

(c) $A > B$

(d) no es posible establecer ninguna relación entre A y B.

Opción correcta: (a)

Solución: El área A se puede calcular sumando tres veces el área del sector circular y restando dos veces el área del triángulo equilátero de lado 1 que se forma al intersecar estos sectores. De esta forma tenemos que

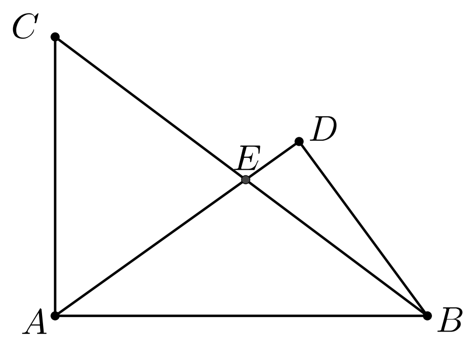
$$A = 3 \cdot \left(\pi \cdot \frac{60}{360}\right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}.$$

Además, $B = \pi \cdot (1/2)^2 = \pi/4$. Sea $\star$ una relación de orden $(<, >, =)$. Obtenemos que

$$A \star B \iff \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \star \frac{\pi}{4} \iff 2\pi - 2\sqrt{3} \star \pi \iff \pi \star 2\sqrt{3} \iff \pi^2 \star 12.$$

Finalmente, sabemos que $\pi < 3,2$, por lo que $\pi^2 < 10,24 < 12$. De esta forma concluimos que $\star$ corresponde al signo $<$, es decir, se cumple que $A < B$.

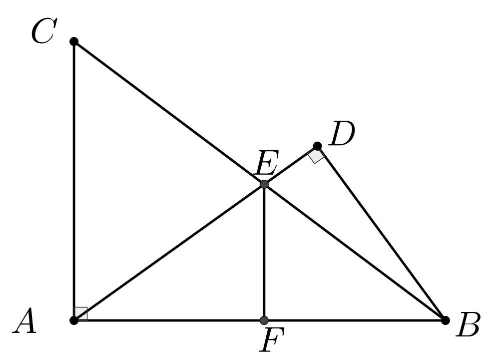
9. En la figura adjunta, se tiene que el $\triangle ABC$ es rectángulo en A, el $\triangle ADB$ es rectángulo en D y el punto E es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Si $AC = 15\,cm$, $AD = 16\,cm$ y $BD = 12\,cm$, el área del $\triangle ABE$, en centímetros cuadrados, es



(a) $50\,\text{cm}^2$
(b) $75\,\text{cm}^2$
(c) $100\,\text{cm}^2$
(d) $150\,\text{cm}^2$

Opción correcta: (b)

Solución: De acuerdo con la información dada, considere la siguiente figura:



Por el Teorema Pitágoras, se tiene que: $AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,cm$.

Observe que $\triangle ABC \sim \triangle DAB$ por el criterio de semejanza ángulo-ángulo. Entonces, $\angle BAE = \angle ABE$ y por lo tanto $AE = EB$. Por lo anterior, se deduce que el $\triangle ABE$ es isósceles. Se traza la altura del $\triangle ABE$ que interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto F, $AF = FB = 10\,cm$.

Por otro lado, $\triangle AFE \sim \triangle BAC$ por el criterio de semejanza ángulo-ángulo. Entonces, $\dfrac{FE}{AC} = \dfrac{AF}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FE = \dfrac{15}{2}\,cm$.

Por lo tanto, el área del triángulo $(AEB) = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot FE = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot \dfrac{15}{2} = 75\,cm^2$.

10. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sea I su incentro (es decir, la intersección de las bisectrices internas). Sean K y L las intersecciones de BI y CI con AC y AB respectivamente. Si se sabe que existe una circunferencia que pasa por los puntos A, K, I, y L; el valor del ángulo $\angle BAC$ corresponde a

    (a) $30°$

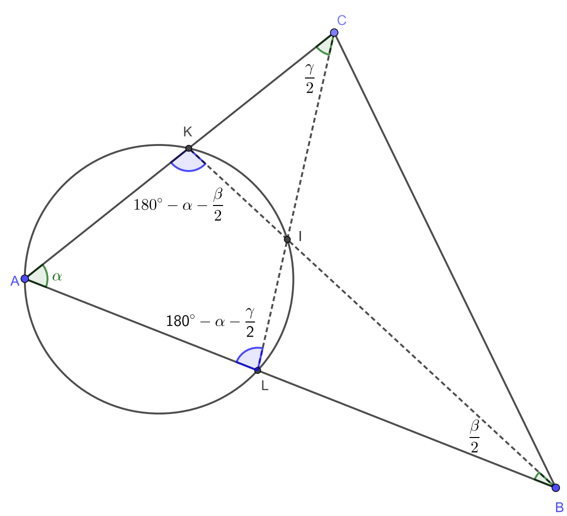
    (b) $50°$

    (c) $60°$

    (d) $110°$

    Opción correcta: (c)

    Solución: De acuerdo con la información dada se obtiene la siguiente figura:



Sean $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ y $\angle ACB = \gamma$. Luego, se tiene que:

- $\widehat{AKI} = 360° - 2\alpha - 2\gamma$
- $\widehat{ALI} = 360° - 2\alpha - 2\beta$

Se suma los respectivos lados de las igualdades y se obtiene:

$360° = 720° - 3\alpha - \alpha - \beta - \gamma$

$360° = -3\alpha - 180° \Rightarrow 180° = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 60°$

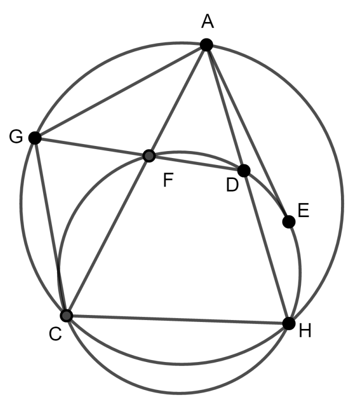
11. Considere un cuadrilátero $DFCH$ inscrito en una circunferencia tal que $DF < HC$. Sea A el punto de intersección entre $\overleftrightarrow{FC}$ y $\overleftrightarrow{DH}$ y E uno de los puntos en el que una de las tangentes trazadas desde A interseca a la circunferencia mencionada. Sea G un punto de la circunferencia circunscrita al triángulo ACH tal que $G - F - D$. Entonces, con certeza se cumple que:

   (a) $CG = DH$
   (b) $AE = AG$
   (c) $AE = CG$
   (d) $CH = DG$

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Considere la siguiente figura:



Sea $\alpha = m\angle AHC$. Note que $m\widehat{AGC} = 2\alpha$, por lo que $m\widehat{AHC} = 360° - 2\alpha$. Como $\angle AGC$ es inscrito a este último arco, se tiene que $m\angle AGC = 180° - \alpha$. De manera análoga, se prueba que $m\angle CFD = 180° - \alpha$ y por lo tanto se concluye que $\angle AGC = \angle AFG$. Por criterio $A - A$, se tiene que $\triangle ACG \sim \triangle AGF$ y así $\frac{AC}{AG} = \frac{AG}{AF}$, por lo que $AG^2 = AC \cdot AF$.

Pero se sabe que $AE^2 = AC \cdot AF$, por lo que $AG^2 = AE^2$ y así se cumple que $AG = AE$.

12. Se colocan los números enteros del 2 al 7 sin repetir en las caras de un dado de seis caras. A continuación a cada vértice del dado se le asocia el producto de los tres números colocados en las tres caras que lo contienen, y se suma todos estos resultados. La máxima suma que se obtiene al realizar este proceso corresponde a

    (a) 512
    (b) 625
    (c) 729
    (d) 1024

    Opción correcta: (c)

    Solución: Sean a, b, c, d, e, y f los números colocados en las caras del dado como en la figura. La suma que queremos calcular corresponde a

$$\begin{aligned} abc + ace + aef + afb + dbc + dce + def + dfb &= a(bc + ce + ef + fb) + d(bc + ce + ef + fb) \\ &= (a + d)(bc + ce + ef + fb) \\ &= (a + d)(b + e)(c + f). \end{aligned}$$

    El máximo producto se alcanza cuando todos estos factores son iguales, y esto pasa si $a + d = b + e = c + f = 9$. Esto puede pasar si por ejemplo $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 7$, $e = 6$, y $f = 5$. Por lo tanto la máxima suma coincide con $9^3 = 729$.

II Parte: Desarrollo. **Valor: 14 puntos, 7 puntos cada pregunta**

1. Si sabe que $\dfrac{2}{n^2-1}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$. Calcule el valor de la siguiente expresión

$$\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{3^2}{2\cdot 4}+\frac{4^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{22^2}{21\cdot 23}$$

Solución:
Se sabe que $\dfrac{2}{n^2-1}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$, se procede a calcular el valor de

$$\begin{aligned}
&\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{3^2}{2\cdot 4}+\frac{4^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{22^2}{21\cdot 23}\\
= \quad & 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)\\
= \quad & 21+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{20}-\frac{1}{22}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)\\
= \quad & 21+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{21}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{22}-\frac{1}{23}\right)\\
= \quad & 21+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{22}-\frac{1}{23}\right)\\
= \quad & 21+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{45}{506}\right)\\
= \quad & 21+\frac{1}{2}\left(\frac{357}{253}\right)\\
= \quad & 21+\frac{357}{506}\\
\approx \quad & 21,70
\end{aligned}$$

2. En un círculo se colocan de forma igualmente espaciada a 5 hombres y 9 mujeres. Si la probabilidad de que cada hombre tenga una mujer diametralmente opuestos a él es de m/n, con m y n coprimos, entonces ¿cuál es el valor de $m+n$?

   Solución:

   Enumeramos las posiciones en el círculo como $1,\ 2, \ldots, 14$. Fijamos a uno de los hombres y sin pérdida de generalidad asumimos que está colocado en la posición 1. A continuación colocamos al hombre dos, el cual tiene 12 posibilidades para colocarse. En efecto, solo no puede estar en las posiciones 1 (que ya está ocupada) y la 8 (estaría frente al primer hombre). Por el mismo motivo, para el tercer hombre hay 10 posiciones para colocarse, para el cuarto hay 8, y para el quinto hay 6. Una vez colocados los hombres, las mujeres pueden colocarse de 9! formas en los espacios restantes. El total de formas en que se pueden colocar es 9!. Por lo tanto la probabilidad buscada es
$$p = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 9!}{13!} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{48}{143}.$$
   Como $(48, 143) = 1$, entonce $m + n = 48 + 143 = 191$.