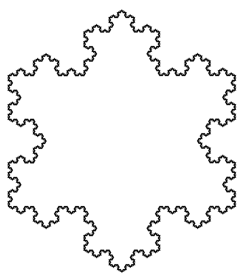
XXXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Soluciones
Segunda Eliminatoria Nacional



Nivel I

(7°)

2023

Estimado estudiante:
La Comisión de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas 2023 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única, y dos preguntas de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

I Parte: Selección única. Valor: 24 puntos, 2 puntos cada pregunta

1. Al efectuar la operación $\dfrac{2^{2022} \cdot 5^{2023}}{10^{2021}}$ se obtiene como resultado

   (a) 50

   (b) 2^{2021}

   (c) 5^{2022}

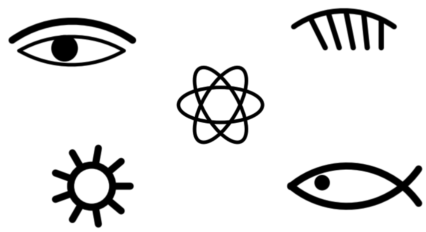
   (d) $\dfrac{1}{10^{2024}}$

   Opción correcta: (a)

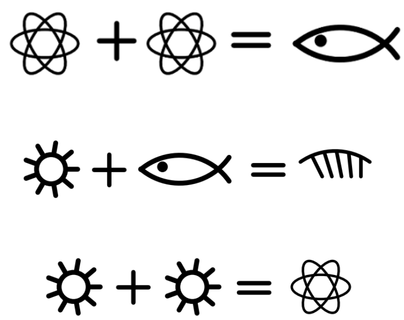
   Solución:

   Observe que
$$\frac{2^{2022} \cdot 5^{2023}}{10^{2021}} = \frac{2^{2022} \cdot 5^{2022} \cdot 5}{10^{2021}} = \frac{10^{2022} \cdot 5}{10^{2021}} = 10 \cdot 5 = 50\,.$$

2. En un lenguaje antiguo los símbolos que se muestran representan los números 1, 2, 3, 4, y 5, en algún orden.

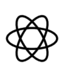


¿Cuál de los símbolos representa el número 3 si se sabe que se cumplen las siguientes tres igualdades?



(a) 

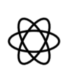
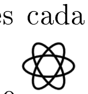
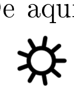
(b) 

(c) 

(d) 

Opción correcta: (a)

Solución:

Tenemos que  y  son números pares pues cada uno es la suma de dos números iguales. Entonces de la primera igualdad deducimos que  vale 2 y  vale 4. De aquí ya podemos ver, gracias a la segunda igualdad y a que los números varían entre 1 y 5, que  vale 1 y  vale 5 (observamos aquí que también la tercera igualdad se cumple). Entonces, el que vale 3 es . La respuesta es (a).

3. Si $a = 4$ y $b = 6$, la expresión $\dfrac{\dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{1}{a}\right)^2}$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{168}{59}$

   (b) $\dfrac{648}{35}$

   (c) $\dfrac{285}{4}$

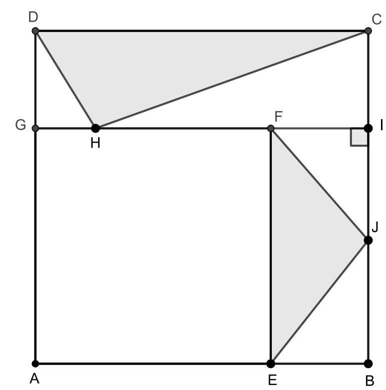
   (d) $\dfrac{324}{19}$

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se procede a sustituir los valores a y b en la expresión dada, luego se realizan las operaciones fraccionarias y potencia, además se simplifica el resultado. Es decir;

$$\frac{\dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{1}{a}\right)^2} = \frac{\dfrac{4 \cdot 6}{2} + \dfrac{6}{4}}{\dfrac{4}{6} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \frac{12 + \dfrac{3}{2}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{16}} = \frac{\dfrac{27}{2}}{\dfrac{35}{48}} = \frac{648}{35}.$$

4. En la figura adjunta se presenta un rectángulo $ABCD$ cuya área es de 100 cm^2, además las diagonales del cuadrado $AEFG$ miden 8 cm. Entonces el área, en cm^2, de la región sombreada $(DHC) + (EFJ)$ corresponde a

   (a) 30
   (b) 32
   (c) 34
   (d) 36



Opción correcta (c)

Solución

Como todo cuadrado es también un rombo, entonces $(AEFG) = \dfrac{8 \times 8}{2} = 32$, pero como el área del rectángulo $ABCD$ es 100, la suma de las área de los rectángulos $DGIC$ y $FEBI$ corresponde a $100 - 32 = 68$. Por otra parte note que $(DHC) = \frac{1}{2}(DGIC)$ y $(EFJ) = \frac{1}{2}(FEBI)$, por lo tanto $(DHC) + (EFJ) = \frac{1}{2}\left((DGIC) + (FEBI)\right) = \frac{1}{2} \cdot 68 = 34\,.$

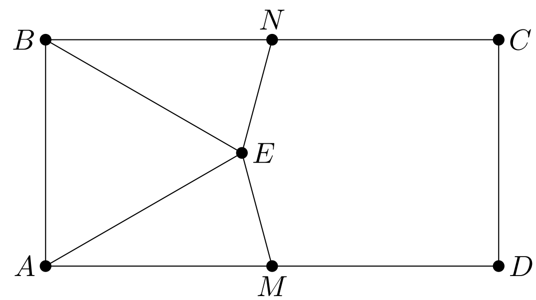
5. En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es un rectángulo en el cual $AD = 2AB$. M y N son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. El $\triangle ABE$ es equilátero, ¿Cuál es la medida del $\angle NEM$?

   (a) $120°$

   (b) $135°$

   (c) $150°$

   (d) $170°$



Opción correcta: (c)

Solución: Como el $\triangle ABC$ es equilátero tenemos que $AB = BE = AE$ y $m\angle ABE = m\angle BEA = m\angle BAE = 60°$. Además por hipótesis $AD = 2AB$ y M y N son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, entonces $AB = BE = AE = AM = BN$. Esto quiere decir que $\triangle AEM$ y $\triangle BEN$ son isósceles y

$$m\angle AEM = m\angle AME \text{ y } m\angle BEN = m\angle BNE \tag{1}$$

Por otra parte, como el $\square ABCD$ es un rectángulo

$$\begin{aligned} m\angle BAM = 90° \quad &\Rightarrow \quad m\angle BAE + m\angle EAM = 90° \\ &\Rightarrow \quad 60° + m\angle EAM = 90° \\ &\Rightarrow \quad m\angle EAM = 30°\,. \end{aligned}$$

Por un argumento análogo, $m\angle EBN = 30°$. Entonces por (1) y el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

$$m\angle AEM = m\angle AME = m\angle BEN = m\angle BNE = 75°\,.$$

Ahora se puede ver que

$$\begin{aligned} & m\angle AEM + m\angle AEB + m\angle BEN + m\angle NEM = 360° \\ \Rightarrow \quad & 75° + 60° + 75° + m\angle NEM = 360° \\ \Rightarrow \quad & m\angle NEM = 150°\,. \end{aligned}$$

6. Una escalera tiene numerados los escalones a partir del 0 en orden creciente hacia arriba, en la forma $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ y así sucesivamente. Una rana está en el escalón 0, salta cinco escalones hacia arriba hasta el escalón 5 y luego dos para abajo hasta el escalón 3, después sigue saltando alternando cinco escalones para arriba y dos para abajo, dando como resultado la sucesión de escalones que pisa la rana $\{0, 5, 3, 8, 6, \ldots\}$ ¿Cuál de los siguientes escalones NO pisa la rana?

   (a) 2017
   (b) 2021
   (c) 2022
   (d) 2024

   Opción correcta: (a)

   Solución: Los números de los escalones que pisa la rana son múltiplos de 3 (de la forma $3a$) o múltiplos de 3 más 5 (de la forma $3b + 5$). De las opciones que tenemos, el único que no se puede escribir de una de estas dos formas es el 2017. La respuesta es (a).

7. Carlos dispone de cierta cantidad de dinero para comprar 3 artículos. Por el primero paga la tercera parte de su dinero más 2000 colones. Por el segundo paga la mitad de lo que le sobró más 1000 colones. Y finalmente, por el tercero paga la mitad del sobrante más 2000 colones, gastando así todo su dinero. ¿Cuánto dinero tenía Carlos antes de comprar el primer artículo?

   (a) 15000
   (b) 18000
   (c) 24000
   (d) 30000

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Si M denota la cantidad de dinero que le costó el tercer artículo (lo que le quedaba al final), entonces se tiene que $M = M/2 + 2000$, de donde $M = 4000$.

   Si N denota lo que tenía antes de comprar el segundo artículo, entonces se tiene que $N/2 - 1000 = 4000$ y así $N = 10000$.

   Y si P denota la cantidad de dinero que tenía Carlos antes de comprar el primer artículo, entonces se tiene que $\frac{2}{3}P - 2000 = 10000$, de donde $P = 18000$.

8. David tiene un juego de cartas. Cada carta tiene seis casillas, y cada casilla puede tener un corazón o un círculo, como la que se muestra en la figura.

○	♡
♡	○
○	○

El juego de cartas tiene todas las configuraciones posibles, y cada configuración aparece exactamente una vez. David saca una carta al azar. Entonces la probabilidad de que la carta tenga como máximo dos corazones es

(a) $\frac{15}{64}$.
(b) $\frac{22}{64}$.
(c) $\frac{32}{64}$.
(d) $\frac{42}{64}$.

Opción correcta: (b)

Solución:

Primero, observe que la cantidad total de cartas es $2^6 = 64$, pues son 6 casillas y hay dos opciones para cada casilla, tener un círculo o un corazón. Por otro lado, para que la carta tenga como máximo dos corazones, entonces puede no tener corazones, tener un corazón o tener exactamente dos corazones. Del primer tipo solo hay una, la que tiene seis círculos. Del segundo tipo hay seis, que corresponde a tener un corazón en cualquier casilla, y círculos en las demás. Por último, del tercer tipo hay quince opciones posibles. En total son $1 + 6 + 15 = 22$, y la probabilidad es $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$.

Nota: Las cartas que tienen dos corazones se pueden determinar haciendo las quince configuraciones, o también observando que solo hay que escoger dos posiciones, y poner dos corazones, de esto hay $6 \times 5 = 30$ formas, pero el orden no importa, pues ambas son corazones, lo que da $\frac{30}{2} = 15$.

9. El número d es el menor entero que tiene exactamente 27 divisores diferentes. La cantidad de divisores primos que tiene d corresponde a:

   (a) Uno
   (b) Dos
   (c) Tres
   (d) Cuatro

   Opción correcta: (c)

   Solución:

   Según el teorema de la cantidad de divisores positivos de un número entero 27 es el producto de los consecutivos de los exponentes de los factores primos de dicho número en su descomposición canónica. Es decir si el número es $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ con a, b, c primos, tenemos que la cantidad de divisores del numero es $(x+1)(y+1)(z+1)$. Para factorizar 27 tenemos tres opciones

   - $27 = 27 \cdot 1$ entonces el número que buscamos es de la forma un primo a la 26.
   - $27 = 9 \cdot 3$ entonces el número que buscamos es de la forma un primo a la 8 por otro primo a la 2.
   - $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ entonces el número que buscamos es el producto de tres primos distintos a la 2.

   Para que el número que buscamos sea el menor posible debemos colocar en las bases los primos menores. Tomando en cuenta los casos analizados tenemos tres candidatos

   - 2^{26}, porque si $p > 2$ entonces $p^{26} > 2^{26}$,
   - $2^8 \cdot 3^2$, porque $2^8 \cdot 3^2 < 3^8 \cdot 2^2$,
   - $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, y lo mismo para cualquier escogencia de primos mayores.

   Ahora bien $2^{26} > 2^8 \cdot 3^2$ porque simplificando se tiene que $2^{18} > 3^2$ y esto último es evidentemente cierto. A su vez $2^8 \cdot 3^2 > 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ que es equivalente a $2^6 > 5^2$ lo cual es cierto. Así el menor de los números que buscamos es $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ y tiene tres divisores primos.

10. En una clase hay 25 alumnos. De ellos 17 alumnos son ciclistas, 13 nadadores y 8 esquiadores. Además ningún alumno practica tres deportes. Los ciclistas, nadadores y esquiadores se sacaron 9 en matemáticas y 6 alumnos, que son el resto de la clase, se sacaron 6 en matemáticas. Se escoge un estudiante aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de que sea nadador y sepa esquiar?

    (a) $\frac{17}{25}$
    (b) $\frac{9}{25}$
    (c) $\frac{19}{25}$
    (d) $\frac{2}{25}$

    Opción correcta: (d)

    Solución: Hay 25 alumnos en la clase. Como 6 alumnos se sacaron 6 en matemáticas, hay 19 alumnos que no tienen 6 en matemáticas y hay a lo más el mismo número de deportistas. Si le damos 1 punto a cada uno de los deportes practicado por algún alumno tenemos $17 + 13 + 8 = 38$ puntos para los deportes. Como hay a lo más 19 personas que practican deportes y ninguna de ella practica 3 deportes, entonces tenemos que todas practican 2 deportes. De los 19 deportistas 17 son ciclistas, así que hay únicamente 2 alumnos que son nadadores y esquiadores a la vez. Por tanto la probabilidad corresponde a $\dfrac{2}{25}$ y la respuesta es (d).

11. Al número 867 se le cambian dos de sus dígitos, el dígito que no se cambia mantiene su posición original. Con este cambio se obtiene un número de tres cifras divisible por 9. Al restar el mayor número posible obtenido menos el menor número posible obtenido el resultado corresponde a

    (a) 765
    (b) 891
    (c) 846
    (d) 774

    Opción correcta: (c)

    Solución:

    Para obtener el mayor número posible de tres dígitos divisible por 9, se debe cambiar el 8 por un 9 y el 7 por un 3. De modo que dicho número es 963. Para obtener el menor número posible de tres cifras divisible por 9 se debe cambiar el 8 por un 1 y el 6 por un 1. De modo que dicho número es 117. Así, la diferencia entre el mayor y el menor número es $963 - 117 = 846$.

12. Sean d y r enteros positivos, con $d > 1$ y tales que r es el residuo que se obtiene cuando cada uno de los números 86, 64, 141 son divididos por d. Entonces, el valor de $d - r$ es

    (a) 11
    (b) 9
    (c) 6
    (d) 2

    Opción correcta: (d)

    Solución:

    De acuerdo con la hipótesis, al dividir los tres números entre d, el residuo siempre es r, es decir, se cumple que

    Se tiene que

$$\begin{aligned} 64 &= d \cdot q_1 + r, \\ 86 &= d \cdot q_2 + r, \\ 141 &= d \cdot q_3 + r\,. \end{aligned}$$

    donde q_1, q_2, q_3 serían los respectivos cocientes. Restando dos a dos se obtiene que

$$\begin{aligned} 22 &= d \cdot (q_2 - q_1), \\ 55 &= d \cdot (q_3 - q_2), \\ 77 &= d \cdot (q_3 - q_1) \end{aligned}$$

    Entonces, $d|22, d|55$ y $d|77$. Los únicos divisores comunes de estos tres números son 1 y 11, de donde se tiene que $d = 11$. Luego $64 = 11 \cdot 5 + 9$, de donde se concluye que $d - r = 11 - 9 = 2$.

II Parte: Desarrollo. Valor: 14 puntos, 7 puntos cada pregunta

1. Alina, Mónica, Sofía y Victoria son 4 mujeres cuyas profesiones son: abogada, gerente, contadora y dentista. Además, cada una de ellas vive en una provincia distinta, a saber: Cartago, Alajuela, Heredia y Limón. Se desconoce quién es quién, así como el lugar donde vive, pero se cuenta con la siguiente información:

   - Mónica es cliente de la abogada.
   - Sofía y la contadora nunca han visitado las provincias de Heredia y Limón.
   - Alina y la dentista no conocen a la mujer que vive en Limón, quien no es la gerente, ya que esta última vive en Cartago.

   Determine la profesión y el lugar donde vive cada una de las mujeres. Explique con detalle su respuesta.

   Solución:

   De acuerdo con la información del problema, por las condiciones 2 y 3 se deduce que la mujer que vive en Limón es la abogada, y su nombre es Victoria. Luego, dado que la gerente vive en Cartago y Sofía y la contadora nunca han visitado Heredia y Limón, se deduce que Sofía es la gerente y vive en Cartago. Como ya se conoce que Sofía es la gerente y Victoria es la abogada, entonces por la condición 3 se deduce que Alina es la contadora y por la condición 2, se concluye que vive en Alajuela. Finalmente, Mónica es la dentista y vive en Heredia.

   Nota: Observe que el razonamiento anterior lleva a la conclusión de que Mónica, quien es la dentista, es clienta de la abogada, y que la dentista no conoce a la mujer de Limón, que resulta ser la abogada. Esto implica que Mónica no conoce a la abogada, de quien es clienta. Esta información puede resultar algo contradictoria (pero es posible). Por esta razón se considera como un razonamiento válido establecer esta contradicción, o bien, descartar que Mónica sea la dentista por la misma razón.

2. Unos familiares deciden realizar un viaje, para lo cual alquilan un vehículo por 522 dólares. Convienen pagar cada uno según el gasto que se realice. En el trayecto tres de ellos deciden quedarse. Los que terminaron el viaje tuvieron que pagar 29 dólares más que los que se quedaron. ¿Cuántas familiares iniciaron el viaje?

   Solución: La respuesta es 7 personas, considere lo siguiente: Sea x el número de personas, todos pagan y dólares . Entonces $xy + 29(x-3) = 522$. Al despejar y, se obtiene $y = \dfrac{609 - 29x}{x} = \dfrac{29(21-x)}{x}$ se deduce que x tiene que ser divisor de $21 - x$, pues 29 es un número primo.

   Luego x tiene que dividir a 21, se tienen los siguientes casos:

   - Si $x = 1$, no puede es posible, pues tres de ellos deciden quedarse en el trayecto.
   - Si $x = 3$, no puede es posible, pues no quedaría nadie en el automóvil.
   - Si $x = 7$ Es la solución.
   - Si $x = 21$, no puede es posible, pues tres de ellos que deciden quedarse en el trayecto no pagarían nada.