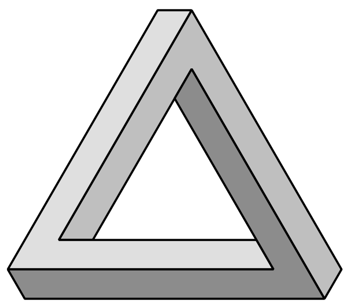
XXXIV Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

II Eliminatoria



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

2022

INDICACIONES GENERALES

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y 2 de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 7 de Octubre**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

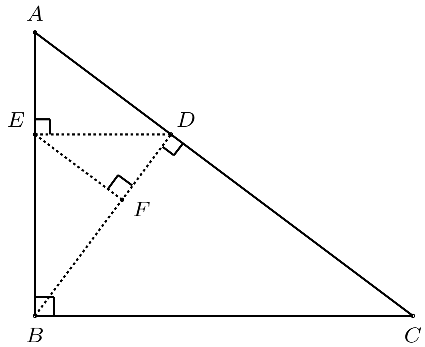
SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 puntos c/u**

Instrucciones:En cada uno de los siguientes ejercicios se le proporcionan cuatro opciones de respuestas, resuelva cada ejercicio y seleccione la opción que antecede a la respuesta correcta.

1. De acuerdo con los datos de la figura en la cual $AB = 3$, $BC = 4$, el valor de EF corresponde a



(a) $\frac{125}{144}$

(b) $\frac{144}{125}$

(c) $\frac{108}{125}$

(d) $\frac{125}{108}$

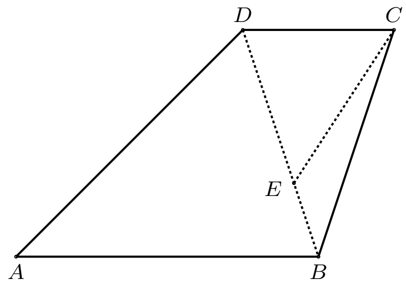
2. Dada la siguiente figura se tiene que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $AB = 2CD$ y $DB = 3EB$, determine $\dfrac{(ABCD)}{(DCE)}$

(a) 9

(b) 3

(c) $\frac{9}{2}$

(d) $\frac{1}{9}$



3. Considere las siguientes listas de números escritos en forma fraccionaria:
   Lista 1: $\frac{0}{2022}, \frac{1}{2022}, \frac{2}{2022}, \ldots, \frac{2021}{2022}, \frac{2022}{2022}$.

   Lista 2: $\frac{0}{9099}, \frac{1}{9099}, \frac{2}{9099}, \ldots, \frac{9098}{9099}, \frac{9099}{9099}$.
   En la primera lista se tiene 2023 fracciones y en las segunda lista se tiene 9100 fracciones. La cantidad de fracciones de la primera lista que son iguales a la segunda lista corresponde a

   (a) 996
   (b) 1012
   (c) 2022
   (d) 3033

4. Si Diana piensa en dos números naturales, tales que, si los suma o los resta el resultado es un número primo, pero la diferencia de sus cuadrados es 253, entonces el producto de los números que Diana esta pensando corresponde a

   (a) 102

   (b) 253

   (c) 328

   (d) 476

5. Sean x, y números reales que satisfacen la igualdad $(4x-1)^2 + (5x+3y)^2 = 0$. Determine el valor de $x - y$.

   (a) $\frac{-2}{3}$

   (b) $\frac{-1}{6}$

   (c) $\frac{1}{6}$

   (d) $\frac{2}{3}$

6. La cantidad de números positivos de tres dígitos que son divisibles por 12 pero que no son divisibles por 9 es

   (a) 45

   (b) 50

   (c) 55

   (d) 60

7. Si a, b son números reales tales que $\dfrac{2b-a}{a+b} = \dfrac{a-b}{2b+a}$, entonces el valor de $\dfrac{3b^2}{2a^2}$ es

   (a) $\dfrac{3}{5}$

   (b) $\dfrac{2}{5}$

   (c) $\dfrac{5}{2}$

   (d) $\dfrac{5}{3}$

8. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m\angle BAD = 60°$, $m\angle ABC = 90°$ y $m\angle ADC = 120°$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, $m\angle CMD = 45°$ y $MD = 6$, entonces el valor de AB es

   (a) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

   (b) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$

   (c) $4\sqrt{6}$

   (d) $6\sqrt{2}$

9. Hay tres cajas con bolas azules (A) y rojas (R), una de las cuales tiene tres azules, otra dos azules y una roja, y otra una azul y dos rojas. Se tienen etiquetas AAA, AAR y ARR para identificarlas (según la cantidad de bolas azules y rojas en cada caja), pero la persona encargada de hacerlo se equivoca y coloca mal todas las etiquetas. Es decir, ninguna etiqueta corresponde con la caja respectiva.

   El menor número de bolas que hay que sacar, sin ver el interior de la caja, para poder determinar con total certeza el contenido correcto de las tres cajas es

   (a) Una bola

   (b) Dos bolas

   (c) Tres bolas

   (d) Cuatro bolas

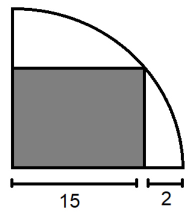
10. Considere un cuarto de círculo con un rectángulo inscrito como se muestra en la figura (la cual no está hecha a escala). Si la longitud de la base del rectángulo es 15 y la longitud del segmento restante es 2, entonces la razón entre las áreas del cuarto de circulo y el rectágulo corresponde a

    (a) $\dfrac{289\pi}{480}$

    (b) $\dfrac{289\pi}{900}$

    (c) $\dfrac{17\pi}{60}$

    (d) $\dfrac{\pi}{4}$



11. Tres amigas Alexandra, Mariel y Sofía lanzan dos dados al aire. Alexandra les propone establecer un evento con la sumas de los números obtenidos en las caras al caer y ver quién gana. Mariel indica que la suma será un cuadrado perfecto. Sofía menciona que la suma será un múltiplo de 5, mientras que Alexandra dice que la suma será un número mayor que 9. Con certeza se puede asegurar que

    (a) Alexandra tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (b) Mariel tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (c) Sofía tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (d) Mariel y Sofía tienen la misma probabilidad de ganar

12. Un entrenador de atletismo programa un calentamiento con sus muchachos de la siguiente forma: Coloca una línea de salida y a 20 metros de la línea de salida coloca un primer cono, a partir de este coloca 24 conos más a 8 metros de distancia uno de otro. Los atletas deben tocar el primer cono y regresar a línea de salida, luego tocar el segundo cono y regresar a línea y así sucesivamente hasta tocar el cono 25 y regresar a la línea. Al finalizar el calentamiento, la distancia en metros recorrida por cada atleta es

    (a) $2900m$

    (b) $3100m$

    (c) $5800m$

    (d) $6200m$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones: Conteste (o resuelva) en forma clara y ordenada los siguientes ejercicios. En esta parte deben desarrollar y escribir **todos** los procedimientos que le permitieron llegar a su respuesta.

1. Alexander, Erick y Leonel juegan un juego durante k rondas. En cada ronda se asigna x puntos al que finalice primero, y puntos al segundo y z puntos al tercero, con $x > y > z > 0$. Al finalizar el juego, Erick obtiene 21 puntos, Leonel 11 puntos y Alexander 8 puntos. Si Leonel ganó la primer ronda entonces, ¿quién obtuvo más veces el segundo lugar?, ¿cuántos turnos se jugaron? ¿cuál fue la distribución de pts que realizaron?

2. Considere a y b enteros positivos, con $b < 15$. Si $10^{2022} = 15a + b$, determine la suma de los dígitos de $a + b$.