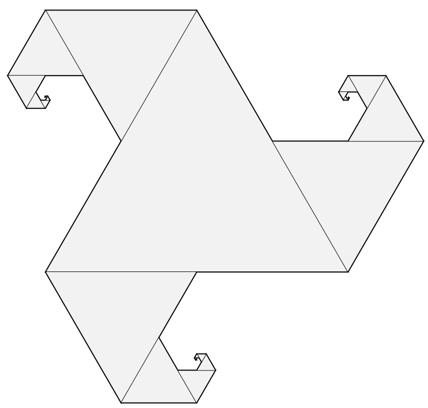
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

II ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y dos preguntas de desarrollo

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **Viernes 7 de Octubre**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

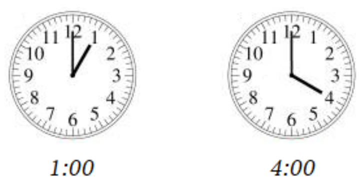
SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 puntos c/u**

Instrucciones:En cada uno de los siguientes ejercicios se le proporcionan cuatro opciones de respuestas, resuelva cada ejercicio y seleccione la opción que antecede a la respuesta correcta.

1. En una habitación rectangular hay dos relojes idénticos, de agujas, en paredes opuestas. Dichos relojes están colocados de la forma usual, funcionan perfectamente, pero no tienen la hora correcta. Carlos observa que cuando su reloj de pulsera marca la 1:00 y el reloj en la pared a su izquierda marca las 4:00; además, en ese instante las agujas de las horas de los relojes en las paredes son paralelas y las agujas de los minutos apuntan al 12. Más tarde, Carlos entra de nuevo a la habitación y observa que su reloj de pulsera marca las 4:00.



Basándose en la información anterior, el reloj de la derecha puede marcar

(a) las 5:00 o las 7:00.

(b) las 7:00 o las 9:00.

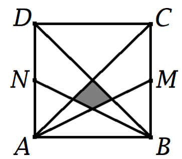
(c) las 9:00 o las 11:00.

(d) las 5:00 o las 11:00.

2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 3 tal que $-1, -2$ y 3 son sus ceros. Con certeza, se puede afirmar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) - x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ corresponde a

   a) $x + 1$
   b) $x + 2$
   c) $x - 3$
   d) $x + 3$

3. Sea $\square ABCD$ un cuadrado con área 72 cm^2, y sean M y N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.



El área del cuadrilátero sombreado en la figura es igual a

(a) 2 cm^2

(b) 3 cm^2

(c) 4 cm^2

(d) 5 cm^2

4. El número de pares ordenados de números reales (a, b) que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} 3a^2 + 2b^2 & = & 7ab \\ a^2 - b^2 & = & 12 \end{cases}$$

corresponde a

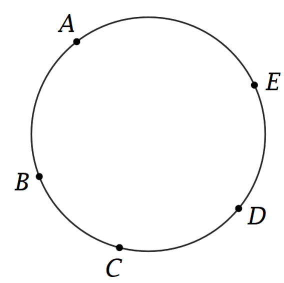
(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

5. Sean A, B, C, D, E puntos en un círculo en sentido antihorario (como en la figura).



Suponga que $AB = DE$ y $AC = CE$ (la figura es ilustrativa y estas hipótesis no están representadas en ella). Considere las siguientes afirmaciones:

I) $BC = CD$,

II) $AD = BE$,

III) $AE = BD$.

Entonces, con total certeza se puede afirmar que son verdaderas

(a) solo I y II

(b) solo I y III

(c) solo II y III

(d) I, II y III

6. La cantidad de números primos p, tales que $25p + 1$ es un cuadrado perfecto es

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

7. Sean $a, b \in \mathbb{R},$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Considere la función f dada por $f(x) = ax^2 + bx$. Si la ecuación $f(f(x)) = 0$ tiene exactamente tres soluciones, entonces el valor de b corresponde a

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

8. En el plano hay 25 puntos, de los cuales hay 4 pintados de azul y 21 de rojo. Los puntos rojos pertenecen a un solo plano π y no hay tres de ellos alineados; ninguno de los puntos azules pertenecen al plano π. Excepto por el plano π, no hay ningún otro plano que contenga cuatro de estos 25 puntos. Considere el conjunto S de todos los planos distintos formados por tres de estos 25 puntos (el plano π se cuenta una sola vez). La probabilidad de que un plano de S esté formado por un vértice rojo y dos azules es igual a

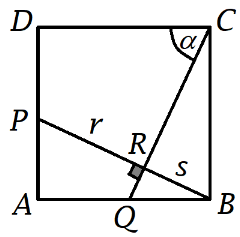
   (a) $\dfrac{6}{126}$

   (b) $\dfrac{126}{971}$

   (c) $\dfrac{840}{970}$

   (d) $\dfrac{126}{970}$

9. En el cuadrado $ABCD$ los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Los segmentos $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ se intersecan formando un ángulo recto en R.



Si $PR = r$, $RB = s$ y $m\angle DCQ = \alpha$, entonces la expresión $\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$ es igual a

(a) $\dfrac{r}{r+s}$

(b) $\dfrac{s}{r+s}$

(c) $\dfrac{\sqrt{rs}}{r+s}$

(d) $\dfrac{r-s}{r+s}$

10. La cantidad de pares ordenados de números enteros positivos (m, n), donde m es menor o igual a 2022, tales que

$$m^2 + n^2 = m^3$$

corresponde a

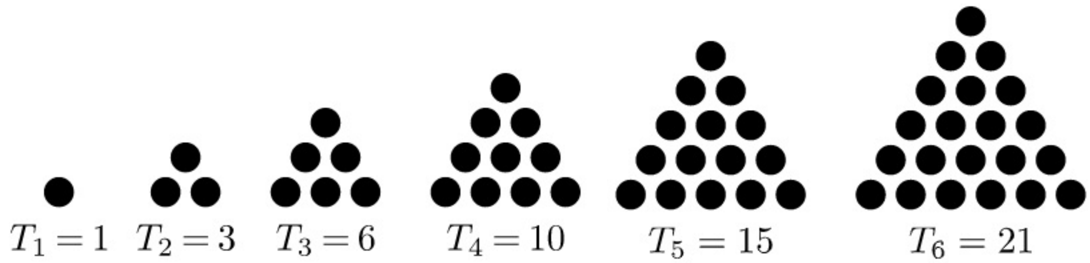
(a) 44

(b) 45

(c) 2020

(d) 1010

11. Observe la siguiente sucesión



Los números mostrados en la imagen anterior son los primeros seis términos de la sucesión de números triangulares, denotado por T_n.
Existen dos números triangulares consecutivos, tales que su suma es ocho veces el valor de su resta. El producto de estos dos números triangulares consecutivos es:

(a) 588

(b) 1008

(c) 1620

(d) 2475

12. La cantidad de pares ordenados de enteros positivos (a, b), con $a \leq b$, tales que

$$a^b \cdot b^a = 2^{48}$$

es igual a

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 puntos c/u**

1. Rosa y Valeria son amigas que cumplen años el mismo día; Rosa nació en el siglo XX (del año 1900 al 1999) y Valeria en el siglo XXI (del año 2000 al 2099). En uno de sus cumpleaños ambas notaron que al sumar los cuatro dígitos de su año de nacimiento cada una obtenía su edad actual. Ese día, ambas tenían menos de 99 años. Determine la diferencia de sus edades.

2. En una feria se encuentra una atracción con los números enteros en la recta, que se juega de la siguiente manera:

   - Antes de empezar, la persona que juega debe escoger tirar exactamente la moneda cuatro, cinco, seis o siete veces (y respeta tal decisión).
   - La posición inicial (antes de lanzar por primera vez la moneda) es el número 1.
   - En cada turno, la persona que juega tira una moneda justa (50 % de salir escudo o corona) y se mueve al entero de la izquierda (resta 1) si sale escudo o al entero de la derecha (suma 1) si sale corona.

   Si al final de los lanzamientos la persona se encuentra en un entero múltiplo de 3, entonces recibe un triciclo como premio. Si Maricela quiere ganarse el triciclo, entonces determine cuántas veces debe tirar la moneda para maximizar sus posibilidades.