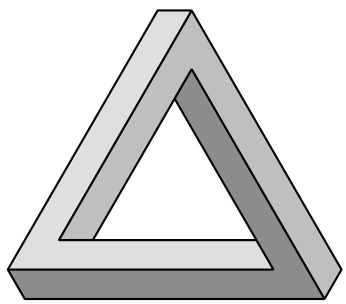
XXXIV Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel II

(8° – 9°)

2022

INDICACIONES GENERALES

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 40 puntos, 2 puntos c/u**

1. Dos pulgas están colocadas sobre la recta numérica, la primera está colocada en el número 0 y da saltos de 3 unidades hacia la derecha, la segunda está colocada en el número n y da saltos de 4 unidades hacia la izquierda. Si ambas empiezan a saltar al mismo tiempo y caen al mismo tiempo en el número 2022, el valor de n es

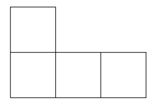
   (a) 4714

   (b) 4718

   (c) 4722

   (d) 4726

2. Se tiene un tablero cuadriculado de tamaño n por n, donde cada cuadrito es de tamaño 1×1. Se quiere cubrirlo completamente con piezas de la forma



de modo que no haya superposición de las piezas. Entonces un posible tablero que si es posible cubrir es el de tamaño

(a) 5×5

(b) 6×6

(c) 7×7

(d) 8×8

3. Alexa, María, Paula y Carla son 4 estudiantes de matemática a quienes se les formularon 3 problemas y solo una de ellas logró resolverlos todos. Se sabe que cada una de ellas logró resolver al menos uno de los problemas. Tres de ellas resolvieron el problema 1, dos resolvieron el problema 2 y solamente una de ellas resolvió el problema 3. Además, Alexa y María tienen la misma condición para el problema 2 (ambas lo resolvieron o ambas no lo resolvieron), María y Paula tienen la misma condición para el problema 1, y el problema 1 no fue resuelto por Paula o por Carla.

   La persona que resolvió los 3 problemas es

   (a) Alexa

   (b) María

   (c) Paula

   (d) Carla

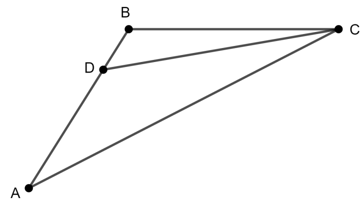
4. En la figura, $BC = 12$ cm, la altura del $\triangle ABC$ trazada desde A mide 7 cm y $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{1}{3}$, entonces el área del $\triangle ADC$ corresponde a

(a) 31,5 cm^2

(b) 10,5 cm^2

(c) 14 cm^2

(d) 21 cm^2



5. La cantidad de números positivos de tres dígitos que son divisibles por 12 pero que no son divisibles por 5 es

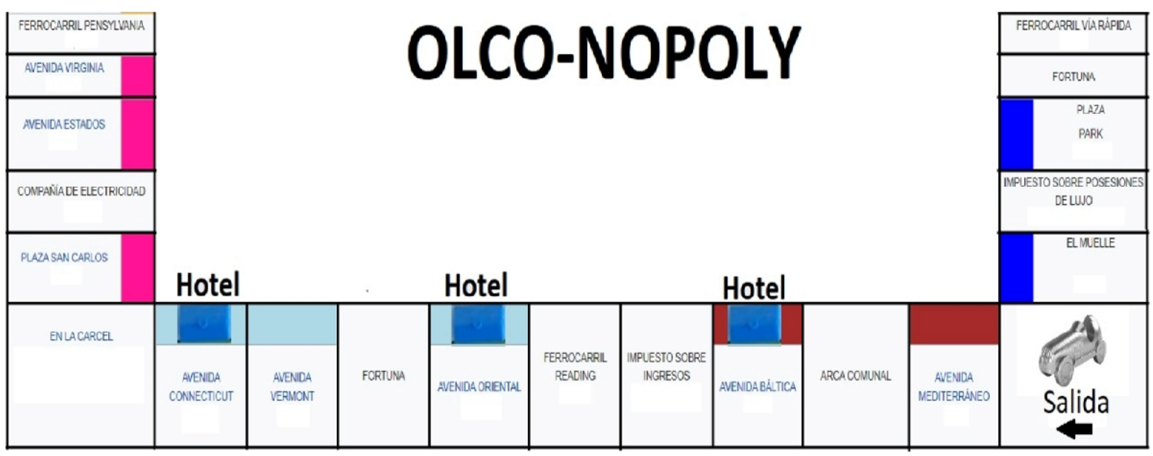
   (a) 55

   (b) 60

   (c) 70

   (d) 75

6. Mateo está jugando Monopoly. Su ficha está en la casilla de salida. El tira dos dados, suma la cantidad obtenida en cada dado y avanza tantas casillas como los dados lo indican. Como Mateo tiene poco dinero en el juego, si cae en un hotel pierde el juego inmediatamente. Los hoteles están en las casillas denominadas Avenida Báltica, Avenida Oriental y Avenida Connecticut.



Fuente: adaptado del Anexo: Tableros del Monopoly, por OLCOMA, 2022 https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Tableros_del_Monopoly

La probabilidad de que Mateo pierda el juego en este turno es

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{6}{21}$

(c) $\frac{11}{36}$

(d) $\frac{1}{2}$

7. Si se quiere escribir el número 2022 como la suma de algunos elementos de la sucesión $6, 18, 54, 162, \ldots$, la cantidad de términos que se deben sumar corresponde a
   (a) 5
   (b) 6
   (c) 7
   (d) 8

8. El 70 % de los estudiantes de un determinado colegio están en olimpiadas de matemáticas y el 60 % de los estudiantes están en olimpiadas de física. Sabiendo que cada estudiante está participando en al menos una de las dos olimpiadas, el porcentaje de los estudiantes que participan en ambas olimpiadas es del:

   (a) 30 %
   (b) 40 %
   (c) 45 %
   (d) 50 %

9. Carlos tiene dos dados de seis caras. Uno con caras enumeradas del 1 al 6, el otro tiene dos caras con el número 2, una cara con el 5 y tres caras con el 6.
   Si tira los dos dados juntos, la probabilidad de que la suma de los dos números sea igual a 9 corresponde a
   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{2}{3}$
   (c) $\frac{1}{6}$
   (d) $\frac{1}{9}$

10. El resultado de realizar la siguiente operación

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

corresponde a

(a) 1

(b) $\dfrac{1}{2021}$

(c) $\dfrac{1}{2022}$

(d) $\dfrac{1}{10110}$

11. La suma de los dígitos del número $10^{40} - 28$ corresponde a

    (a) 351
    (b) 414
    (c) 369
    (d) 432

12. En un torneo de boliche jugarán 9 equipos; cada equipo jugará una vez contra cada uno de los otros 8 equipos y no se permiten empates. En cada juego, al ganador se le otorgará 1 punto y al perdedor 0 puntos. Si se eliminan todos los equipos que al final del torneo hayan acumulado 2 puntos o menos, la máxima cantidad de equipos que podrán quedar eliminados corresponde a:

    (a) 3 equipos.
    (b) 4 equipos.
    (c) 5 equipos.
    (d) 6 equipos.

13. Si se lanzan 10 monedas al aire, la probabilidad de obtener 10 coronas corresponde a

    (a) $\frac{1}{2}$

    (b) $\frac{1}{20}$

    (c) $\frac{1}{100}$

    (d) $\frac{1}{1024}$

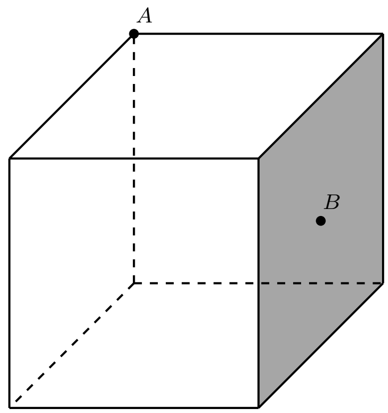
14. En la figura adjunta se muestra un cubo sólido de arista 2, B es el centro de la cara sombreada. Si una hormiga camina desde A hasta B, la menor distancia que recorre es

(a) $\sqrt{10}$

(b) $2+\sqrt{2}$

(c) $1+\sqrt{3}$

(d) $1+\sqrt{5}$



15. Si $\left(1+\frac{1}{2022}\right)^{-2022}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2022}$ entonces el valor de x corresponde a

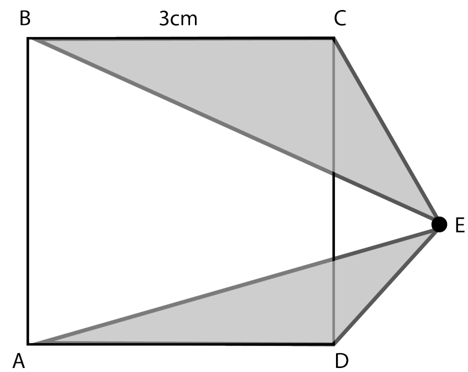
   (a) 2021

   (b) 2022

   (c) 2023

   (d) 2024

16. En la figura el $\square ABCD$ es un cuadrado de 3 cm de lado. La suma de las áreas de $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$, en cm^2, es



(a) $7,5$
(b) 6
(c) $4,5$
(d) 2

17. Natalia tiene 5 letras distintas y forma con ellas combinaciones de manera que cumplen las siguientes reglas:

    - Cada combinación tiene una extensión entre 1 y 5 letras.
    - Cada combinación debe ser un palíndromo, es decir, tiene que leerse igual de derecha a izquierda como de izquierda a derecha. Por ejemplo la combinación Natan es un palíndromo, pues se lee igual de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.
    - Una letra no puede ser usada mas de dos veces en una misma combinación.

    La cantidad máxima de combinaciones que Natalia puede formar con estas reglas es

    (a) 25

    (b) 60

    (c) 110

    (d) 325

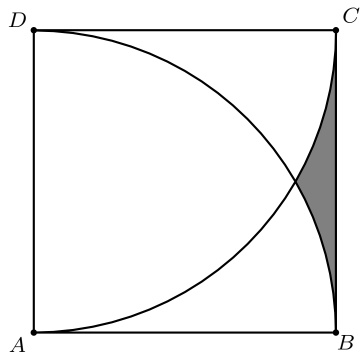
18. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado de 2 unidades de lado. Si los arcos AC y BD son cuartos de circunferencias, el área de la región sombreada es

(a) $4-\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$

(b) $4-\frac{3\pi}{2}-\sqrt{3}$

(c) $4-\frac{2\pi}{3}-2\sqrt{3}$

(d) $4-\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$



19. Considere los números impares colocados en filas de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 3 & & 5 & & & & & \\
 & & & & 7 & & 9 & & 11 & & & & \\
 & & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & & \\
 & & 21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 & & \\
 & 31 & & 33 & & 35 & & 37 & & 39 & & 41 & \\
\iddots & & \cdots & & & & \vdots & & & & \cdots & & \ddots
\end{array}$$

Si el primer número de la fila k difiere en 200 del primer número de la fila siguiente, entonces la suma de los números colocados en la fila k corresponde a

(a) 10^3
(b) 10^6
(c) 10^8
(d) 10^{10}

20. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un rectángulo de 2 unidades de largo y 1 de ancho. Si $\triangle ABF$ y $\triangle DCE$ son equiláteros y $\square BHIG$ es un cuadrado, el área de la región sombreada es

(a) $\dfrac{32-5\sqrt{3}}{24}$

(b) $\dfrac{32-\sqrt{3}}{32}$

(c) $\dfrac{32-\sqrt{3}}{24}$

(d) $\dfrac{32-5\sqrt{3}}{32}$