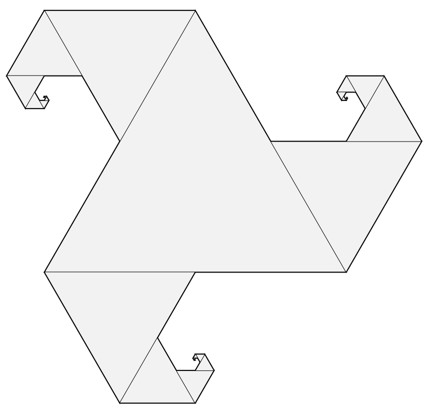
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 40 puntos, 2 puntos c/u**

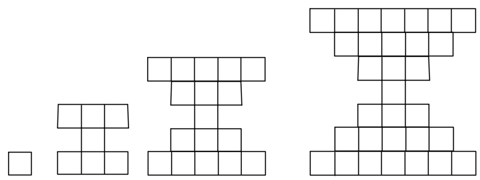
1. Considere la siguiente sucesión de figuras. ¿Cuántos cuadritos tiene la figura cuya base está formada por 35 cuadritos?

   (a) 323

   (b) 645

   (c) 647

   (d) 649



2. En la figura dada, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle JKL$ son equiláteros y los cuadriláteros $\square DELK$, $\square FGJL$ y $\square HIKJ$ son cuadrados.

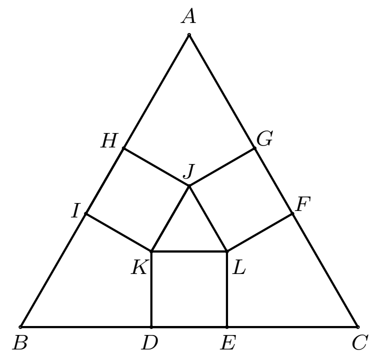
   Si $DE = 1$, entonces la razón entre las áreas $\frac{(BDKI)}{(KLJ)}$ corresponde a:

   (a) 2

   (b) 4

   (c) 6

   (d) 8



3. La cantidad de números de cuatro dígitos que tienen exactamente una vez a los dígitos 2, 5 y 7, y que además son divisibles por 18, es igual a:
   (a) 9
   (b) 12
   (c) 18
   (d) 24

4. La cantidad de números naturales de dos dígitos ab con $a \neq 0$ tales que $a^2 + b^2$ es divisor de 22 corresponde a

   a) uno
   b) dos
   c) tres
   d) cuatro

5. En la expansión decimal de $\frac{8}{3} - \frac{5}{7}$, el dígito que está en la posición 2022 después de la coma es

   (a) 0

   (b) 3

   (c) 8

   (d) 9

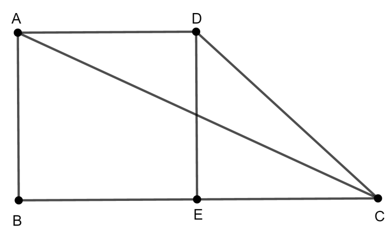
6. En la figura que se muestra, el cuadrilátero $\square ABED$ es un rectángulo y $B-E-C$. Si $AD = 13$, $CD = 15$ y $EC = 7$, entonces la altura del triángulo $\triangle ADC$ sobre el lado $\overline{AC}$ corresponde a

   (a) $4\sqrt{11}$

   (b) $\dfrac{13}{24}\sqrt{11}$

   (c) $\dfrac{13}{12}\sqrt{11}$

   (d) $\dfrac{13}{6}\sqrt{11}$



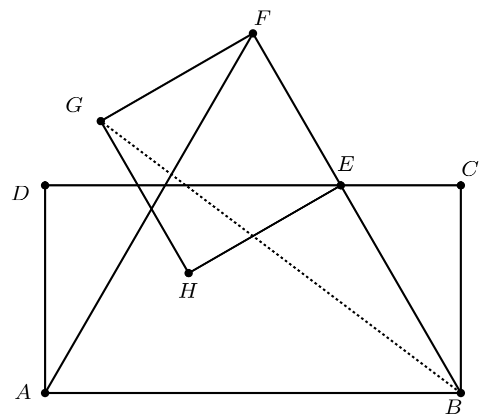
7. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un rectángulo de 2 unidades de largo y 1 de ancho. Si $\triangle ABF$ es equilátero y $\square EFGH$ es un cuadrado, entonces el valor de BG^2 es

(a) $\dfrac{28-8\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{25-4\sqrt{3}}{3}$

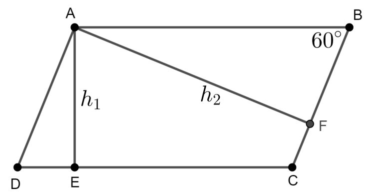
(c) $\dfrac{26-4\sqrt{3}}{3}$

(d) $\dfrac{27-8\sqrt{3}}{3}$



8. Considere el número 30^2 . El producto de todos los divisores positivos de 30^2 es:
   (a) 30^{13}
   (b) 30^{14}
   (c) 30^{26}
   (d) 30^{27}

9. En la figura que se muestra, el cuadrilátero $\square ABCD$ es un paralelogramo con $m\angle ABC = 60°$, cuyo perímetro es 24 y cuya área es $16\sqrt{3}$. Si h_1 y h_2 son las alturas desde A sobre $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, entonces $\dfrac{h_1}{h_2} + \dfrac{h_2}{h_1}$ corresponde a



(a) $\dfrac{9}{2}$

(b) $\dfrac{3}{2}$

(c) $\dfrac{5}{2}$

(d) $\dfrac{7}{2}$

10. Hay tres cajas del mismo tamaño, de colores blanca, negra y roja respectivamente. La caja blanca tiene 100 bolas negras, la caja negra 100 bolas rojas y la caja roja 100 bolas blancas. Las bolas son idénticas salvo por el color. Se toman 22 bolas de la caja blanca y se depositan en la negra, luego, se mezclan bien, y se toman 22 bolas de la caja negra para ponerlas en la roja, finalmente se pasan 22 bolas de la caja roja a la blanca.

    Según la información anterior, cuatros estudiantes A, B, C y D afirman lo siguiente

    I) El estudiante A dice que en total hay más bolas negras en las cajas negra y roja que bolas blancas y rojas en la caja blanca.

    II) El estudiante B dice que en total hay menos bolas rojas en las cajas roja y blanca que bolas negras y blancas en la caja negra.

    III) El estudiante C dice que en total hay la misma cantidad de bolas blancas en las cajas blanca y negra que bolas rojas y negras en la caja roja.

    IV) El estudiante D dice que no hay certeza en que alguno de sus compañeros tengan razón.

    ¿ Cuál de los cuatro estudiantes tiene razón?

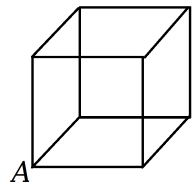
    (a) A.

    (b) B.

    (c) C.

    (d) D.

11. Considere un cubo como el de la figura:



Una hormiga pasea sobre los vértices del cubo caminando a través de sus aristas. Ella se encuentra inicialmente en el vértice A. Cada vez que suena un timbre, la hormiga se desplaza a alguno de los tres vértices vecinos del vértice en que se encuentra. Después de que el timbre ha sonado cuatro veces la hormiga ha recorrido uno de $3^4 = 81$ posibles caminos. La probabilidad de que, al finalizar este camino, la hormiga se encuentre en el vértice A, es igual a

(a) $\dfrac{10}{81}$

(b) $\dfrac{20}{81}$

(c) $\dfrac{7}{27}$

(d) $\dfrac{2}{9}$

12. Beto trabaja en una frutería donde venden bananos, peras y aguacates. Cada banano pesa 150 gramos y cuesta 80 colones, cada pera pesa 250 gramos y cuesta 600 colones, y cada aguacate pesa 375 gramos y cuesta 1000 colones. Carlos selecciona algunas frutas y las pone en la balanza. Sin ver las frutas que Carlos lleva, Beto observa que el peso total es 2,25 kg (es decir, 2250 g). Con total certeza, Beto puede decir que Carlos va a pagar

    (a) al menos 2000 colones

    (b) más de 800 colones, pero menos de 4000

    (c) al menos 1000 colones, pero no más de 5500

    (d) no más de 6000 colones

13. Decimos que un número es *wajiro* si cumple las siguientes dos condiciones: el número es divisible por 22 y al invertir por completo el orden de sus cifras (la primera con la última, la segunda con la antepenúltima y así sucesivamente) se obtiene el mismo número. Por ejemplo, 616 y 2002 son números wajiros, pero 1232 y 1001 no lo son. Entonces, la cantidad de números wajiros de 2022 cifras (la primera debe ser distinta de 0) es igual a

    (a) $2 \cdot 10^{1010}$

    (b) $3 \cdot 10^{1010}$

    (c) $4 \cdot 10^{1010}$

    (d) $5 \cdot 10^{1010}$

14. Considere la ecuación

$$x^{2022} + x^{2021} + \cdots + x^2 + x = 0.$$

La cantidad de soluciones enteras de la ecuación anterior es

(a) cero

(b) uno

(c) dos

(d) tres

15. Considere el número de diez dígitos $n = 9999999995$, el cual está formado por nueve dígitos 9 y un dígito 5. La suma de los dígitos del número n^2 es

    (a) 86

    (b) 87

    (c) 88

    (d) 7396

16. La cantidad de valores enteros para x de forma que la expresión $\dfrac{x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$ sea un número entero es igual a

    (a) cero

    (b) cinco

    (c) nueve

    (d) diez

17. Considere el polinomio $p(x) = 5x - 3$. Sean a y b números reales tales que $p(a) = b$ y $p(b) = a$. Determine el valor de $a + b$.

    (a) $\dfrac{-3}{2}$

    (b) -1

    (c) 1

    (d) $\dfrac{3}{2}$

18. En un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $AB = a$, $BC = 3a$ y $m\angle ABC = 60°$. La altura del triángulo ABC sobre el lado $\overline{AC}$ es igual a

    (a) $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$

    (b) $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$

    (c) $\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$

    (d) $\dfrac{3a\sqrt{39}}{26}$

19. Considere la ecuación $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\pi+e+x}$ donde π y e son los números irracionales y x un número real. Podemos afirmar con certeza que dicha ecuación tiene

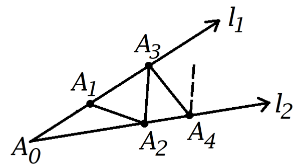
    (a) solución vacía

    (b) solución única

    (c) dos soluciones

    (d) infinita cantidad de soluciones

20. Considere dos rayos l_1 y l_2, como en la figura, que se intersecan en el punto A_0 y forman un ángulo de $9°$:



Empezando con A_1 en l_1, se define el punto A_2 en l_2, con $A_2 \neq A_0$, de forma que los segmentos A_0A_1 y A_1A_2 miden lo mismo. De igual manera, se define el punto A_3 en l_1, con $A_3 \neq A_1$, de forma que los segmentos A_1A_2 y A_2A_3 miden lo mismo. Continuando con el mismo proceso, se definen los puntos $A_4, A_5, A_6, \ldots$, de forma que:

- los puntos $A_1, A_3, A_5, \ldots$ están sobre l_1 y $A_2, A_4, A_6, \ldots$ están sobre l_2,
- A_nA_{n+1} y $A_{n+1}A_{n+2}$ miden lo mismo para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $A_{n+2} \neq A_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Sin embargo, no es posible continuar indefinidamente con esta construcción; es decir, existe un entero N tal que se pueden definir los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ de acuerdo con las condiciones anteriores, pero no es posible construir el punto A_{N+1}. Entonces, el valor de N es

(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 14