XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL II
Lunes 14 de noviembre de 2022
Tiempo disponible: 3 horas

#1 El OLCOFERRY hace un viaje de Puntarenas a Paquera. El capitán, el cocinero y el maquinista tienen el mismo nombre que tres pasajeros, sus nombres (no en ese orden) son: Jorge, Mario y Luis.

(a) Ninguno de los pasajeros son vecinos.
(b) El pasajero Mario vive en Puntarenas.
(c) El cocinero vive en Sámara.
(d) El pasajero Luis gana exactamente 20 000 dólares al año.
(e) El vecino más próximo del cocinero, que es uno de los tres pasajeros, gana exactamente tres veces más que él y su salario es un número entero.
(f) El funcionario Jorge gana al capitán a las cartas.
(g) El pasajero cuyo nombre es igual al del cocinero vive en Paquera.

¿Cómo se llama el maquinista?

Don Mario no puede tener el mismo nombre que el cocinero, puesto que vive en Puntarenas y no en Paquera, esto implica que Mario no es cocinero.

Don Luis, al ganar 20 000 dólares EXACTAMENTE, no puede ser vecino del cocinero puesto que 20 000 no es divisible por 3, entonces deducimos que como Don Mario vive en Puntarenas y Don Luis no vive en Sámara entonces Don Luis debe vivir en Paquera; luego el Cocinero es LUIS.

Jorge al ganarle al capitán en las cartas implica que no es el capitán, y como Luis es el cocinero deducimos que el capitán es MARIO.

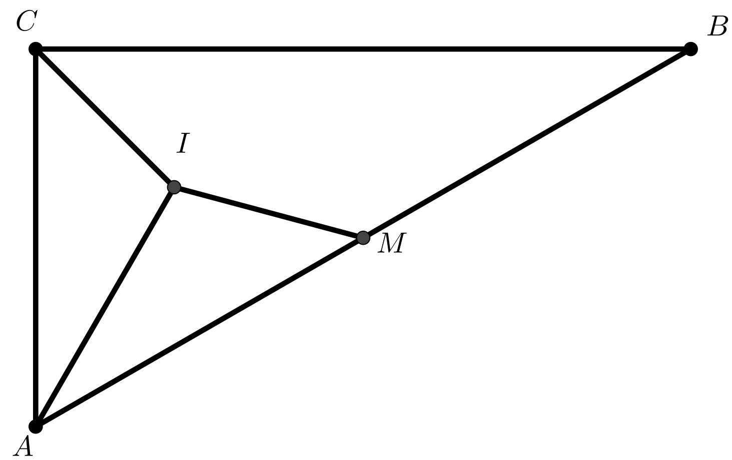
Finalmente el maquinista debe ser JORGE.

#2 Sea ABC un triángulo, tales que, I es su incentro, $A-M-B$ y $CA = MA$. Además, la medida del ángulo CAB es el doble de la medida del ángulo ABC y la medida del ángulo ACB es el triple de la medida del ángulo ABC. Determine la medida del ángulo CIM.

Nota: El incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices del triángulo ABC.

Solución:

Como parte de la información dada, se tiene la siguiente figura:



Considere que la $m\angle ABC = x$. Se tiene que: $m\angle CAB = 2m\angle ABC \Rightarrow m\angle CAB = 2x$ y $m\angle ACB = 3m\angle ABC \Rightarrow m\angle ACB = 3x$. Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que $m\angle ACB + m\angle CAB + m\angle ACB = 180° \Rightarrow x + 2x + 3x = 180° \Rightarrow x = 30°$. Entonces, $m\angle ABC = 30°$, $m\angle CAB = 60°$ y $m\angle ACB = 90°$.

Como I es el incentro del $\triangle ABC$, se deduce lo siguiente: $\overline{IC}$ biseca el $\angle ACB$, entonces $m\angle ACI = m\angle ICB = 45°$. De la misma manera, $\overline{IA}$ biseca el $\angle CAB$, entonces $m\angle CAI = m\angle IAB = 30°$. Por lo anterior y el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que $m\angle AIC = 180° - m\angle ACI - m\angle CAI \Rightarrow m\angle AIC = 180° - 45° - 30° \Rightarrow m\angle AIC = 105°$.

Observe que los $\triangle CAI$ y $\triangle MAI$ tienen en común el $\overline{AI}$. Además, $\angle CAI \cong \angle MAI$ y $CA = MA$. Por el criterio LAL de congruencia para triángulos, se tiene que $\triangle CAI \cong \triangle MAI$. Entonces, $\angle AIC \cong \angle AIM \Rightarrow m\angle AIM = 105°$. Por lo anterior, se deduce que $m\angle CIM = 360° - 2 \cdot m\angle AIC \Rightarrow m\angle CIM = 360° - 210° \Rightarrow m\angle CIM = 150°$.

#3 Sea $n = abab$, con a y b dígitos distintos de cero. Determine todos los números n tal que el producto de los dígitos de n divide a n^2.

Solución:

$$\begin{aligned} n = abab &= 10^3a + 10^2b + 10a + b \\ &= 1\,010a + 101b \\ &= 101(10a + b) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot a \cdot b \mid n^2 &\Rightarrow (a \cdot b)^2 \mid n^2 \\ &\Rightarrow a \cdot b \mid n \\ &\Rightarrow (a \cdot b) \mid 101(10a + b) \\ &\Rightarrow (a \cdot b) \mid 101 \vee (a \cdot b) \mid (10a + b) \end{aligned}$$

Caso 1: $(a \cdot b) \mid 101$
Como 101 es un número primo entonces $a = b = 1$, de esta forma $n = 1\,111$ satisface las condiciones.

Caso 2: $(a \cdot b) \mid (10a + b)$

$(a \cdot b) \mid (10a + b) \Rightarrow a \mid (10a + b) \wedge b \mid (10a + b)$
Como $a \mid 10a$ entonces se concluye que $a \mid b$. Y como $b \mid b$ entonces se concluye que $b \mid 10a$.

De esta forma se tiene que $a \mid b \wedge b \mid 10a$. Por lo cual $b = a$ o $b = 2a$ o $b = 5a$.

- $a = b$ ya fue contemplado. El número es $1\,111$.
-
$$\begin{aligned} b = 2a &\Rightarrow a \cdot 2a \mid 10a + 2a \\ &\Rightarrow 2a^2 \mid 12a \\ &\Rightarrow a \mid 6 \end{aligned}$$
  Con lo que se concluye que $a = 1$ y $b = 2$, $a = 2$ y $b = 4$, $a = 3$ y $b = 6$. De esta forma los números son $1\,212, 2\,424, 3\,636$.
-
$$\begin{aligned} b = 5a &\Rightarrow a \cdot 5a \mid 10a + 5a \\ &\Rightarrow 5a^2 \mid 15a \\ &\Rightarrow a \mid 5 \end{aligned}$$
  Con lo que se concluye que $a = 1$ y $b = 5$. De esta forma $1\,515$ sería otro de los números que satisface las condiciones establecidas.