



XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL III
Lunes 14 de noviembre de 2022
Tiempo disponible: 3 horas

#1 Sea Γ una circunferencia con centro O . Considere los puntos A, B, C, D, E y F en Γ , con D y E en el arco (menor) \widehat{BC} y C en el arco (menor) \widehat{EF} , tales que $\square DEFO$ es un rombo y $\triangle ABC$ es equilátero. Demuestre que \overleftrightarrow{BD} y \overleftrightarrow{CE} son perpendiculares.

#2 Encuentre todas las funciones f , de la forma $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ con p, q y r enteros, tales que $f(s) = 506$ para algún entero s y $f(\sqrt{3}) = 0$.

#3 Shikaku y su hijo Shikamaru deben subir una escalera que tiene 2022 escalones; los escalones se enumeran $1, 2, \dots, 2022$ y el piso se considera el escalón 0. Esto les aburre mucho a ambos, por lo que deciden organizar un juego. Se empiezan atando una cuerda entre ambos, de modo que a lo sumo pueden separarse entre sí una distancia de 7 escalones, es decir, si ellos están en los escalones m y n , entonces se debe cumplir siempre que $|m - n| \leq 7$. Para el juego establecen las siguientes reglas:

- Se mueven por turnos alternadamente.
- En el turno que le corresponde, el jugador debe moverse hacia un escalón más alto que en el que (él mismo) se encontraba anteriormente.
- Si un jugador acaba de moverse al escalón n , entonces en el turno siguiente el otro jugador no se puede mover a ninguno de los escalones $n - 1$, n o $n + 1$, excepto cuando sea para llegar al último escalón.
- Gana el que llegue al último escalón (enumerado con el 2022).

A Shikamaru le aburre empezar, por lo que inicia su padre. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala.