



XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA  
FINAL NACIONAL  
DÍA 2 - NIVEL II

*Martes 15 de noviembre de 2022*

*Tiempo disponible: 3 horas*

- #4 Determine la cantidad de números de seis dígitos distintos que son múltiplos de 24 y también finalizan en 24.
- #5 Se tienen 2022 cajas rotuladas del 1 al 2022, cada una con 2022 bolas. Dos personas juegan de manera alternada. Una jugada consiste en seleccionar una caja y sacar la cantidad de bolas que desee (debe sacar al menos una bola), quedando  $n$  bolas. Luego, de cada caja con rotulación mayor al de la caja seleccionada y que contenga más de  $n$  bolas, se sacan bolas hasta que queden  $n$  bolas en la caja. Pierde el jugador que saque la última bola de la caja 1. Encuentre una estrategia ganadora para alguno de los jugadores y descríbala.
- #6 Sean  $a$  y  $b$  dos números reales diferentes, no nulos (diferentes de cero) tales que:

$$\frac{a^2 + b - 1}{a} = \frac{b^2 + a - 1}{b}.$$

Determine el valor de  $a^2 + b^2 - a^2b^2$ .