XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 2 - NIVEL II
Martes 15 de noviembre de 2022
Tiempo disponible: 3 horas

#4 Determine la cantidad de números de seis dígitos distintos que son múltiplos de 24 y también finalizan en 24.

Solución:

Sea $n = abcd24$ la forma del número dado. Para que n sea múltiplo de 24, debe ser divisible por 8 y por 3. Para que n sea divisible por 8 se debe cumplir que el número de 3 dígitos $d24$ lo sea, de donde se obtienen dos casos: $d = 6$ o $d = 8$. Para que n sea divisible por 3 la suma $a + b + c + d + 2 + 4$ debe ser múltiplo de 3. Analizando casos:

I Caso: $d = 6$

$n = abc624$, $a + b + c + 6 + 2 + 4 = a + b + c + 12$, de donde $a + b + c$ debe ser múltiplo de 3. Como los dígitos deben ser distintos, a, b, c deben tomarse del conjunto $\{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$.
Las tripletas que se pueden formar de modo que la suma sea múltiplo de 3 son
$6 :\ (5, 1, 0)$
$9 :\ (8, 1, 0), (5, 3, 1)$
$12 :\ (9, 3, 0), (7, 5, 0), (8, 3, 1)$
$15 :\ (8, 7, 0), (9, 5, 1), (7, 5, 3)$
$18 :\ (9, 8, 1), (8, 7, 3)$
$21 :\ (9, 7, 5)$

Para cada una de las tripletas que contienen el número 0 se pueden formar 4 números distintos (pues se descarta el caso en que la primera cifra es 0), es decir, se generan 20 posibilidades. Para cada una de las otras 7 tripletas se pueden formar 6 números distintos, es decir, se generan 42 posibilidades. En total se tienen 62 posibilidades para este primer caso.

II Caso: $d = 8$

$n = abc824$, $a + b + c + 8 + 2 + 4 = a + b + c + 14$, de donde $a + b + c \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22\}$ con a, b, c tomados del conjunto $\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$.
Las tripletas que se pueden formar son

$4 :\ (3, 1, 0)$
$7 :\ (6, 1, 0)$

$10: (9,1,0),(7,3,0),(6,3,1)$
$13: (7,6,0),(9,3,1),(7,5,1)$
$16: (9,7,0),(9,6,1),(7,6,3)$
$19: (9,7,3)$
$22: (9,7,6)$

Para cada una de las tripletas que contienen el número 0 se pueden formar 4 números distintos es decir, 24 posibilidades. Para cada una de las otras 7 tripletas se pueden formar 6 números distintos, es decir, 42 posibilidades. En total se tienen 66 posibilidades para el segundo caso.

En total se tienen $62 + 66 = 128$ posibilidades para el número n.

#5 Se tienen 2 022 cajas rotuladas del 1 al 2 022, cada una con 2 022 bolas. Dos personas juegan de manera alternada. Una jugada consiste en seleccionar una caja y sacar la cantidad de bolas que desee (debe sacar al menos una bola), quedando n bolas. Luego, de cada caja con rotulación mayor al de la caja seleccionada y que contenga más de n bolas, se sacan bolas hasta que queden n bolas en la caja. Pierde el jugador que saque la última bola de la caja 1. Encuentre una estrategia ganadora para alguno de los jugadores y descríbala.

Solución:

El primer jugador tiene una estrategia ganadora. Dicha estrategia consiste en sacar 2 021 bolas de la caja número 2, quedando así 2 022 bolas en la caja 1 y 1 bola en cada caja de la 2 a la 2 022. De ahí en adelante, si el segundo jugador extrae x bolas de la caja 1, el primero debe extraer la bola de la caja número $2\,023 - x$. Y si el segundo jugador saca una bola de la j ésima caja, entonces el primer jugador deja $j - 1$ bolas en la caja 1, de modo que cada vez que el primer jugador juega, quedarán tantas bolas en la caja 1 como cajas no vacías. Y así el segundo jugador será quien vacíe la caja 1.

Más específicamente, el primer jugador saca 2 021 bolas de la caja 2 quedando en dicha caja una bola, y en todas las de rotulación mayor solo una bola. En la caja 1 quedan 2 022 bolas. Entonces puede suceder lo siguiente:

(a) Si el segundo jugador toma la bola de la caja 2, entonces en todas las demás quedarían 0 bolas, y al primer jugador le bastaría tomar 2 021 bolas de la caja 1 y la que queda le toca sacarla al jugador 2, perdiendo.

(b) Si el jugador 2 toma una bola de caja 3, entonces el primero saca 2 020 bolas de la caja 1, dejando 2 bolas en dicha caja, y así el segundo jugador pierde con certeza (ya sea porque saca la bola de la caja 2, el primero saca 1 de la caja 1 y la última la toma el segundo, o porque saca 1 bola de la caja 1, pero el primero tomaría la de la caja 2 y al segundo le toca vaciar la caja 1). Así que se infiere que si el segundo jugador toma una bola de la caja j, el primero solo debe dejar $j - 1$ bolas en la caja 1.

(c) Si el segundo jugador toma por ejemplo 2 000 bolas de la caja 1, entonces quedarían 22 bolas ahí, y así el primer jugador debe tomar la bola de caja 23 (de la 23 a la 2 022 quedarían 0 bolas y de la 2 a la 22 quedaría 1). Esto le segura el gane al primer jugador. En general, si el segundo jugador toma x bolas de la caja 1, el primero extrae la bola de la caja $2023 - x$.

#6 Sean a y b dos números reales diferentes, no nulos (diferentes de cero) tales que:

$$\frac{a^2+b-1}{a} = \frac{b^2+a-1}{b}.$$

Determine el valor de $a^2+b^2-a^2b^2$.

Solución

Como $\dfrac{a^2+b-1}{a} = \dfrac{b^2+a-1}{b}$ entonces

$$a^2b+b^2-b = ab^2+a^2-a$$

$$a^2b-ab^2+b^2-a^2-b+a=0$$

$$ab(a-b)-(a+b)(a-b)+(a-b)=0$$

$$(a-b)(ab-a-b+1)=0$$

Como $a \neq b$ entonces

$$a-b\neq 0$$

lo que significa que $ab-a-b+1=0$ y por lo tanto

$$a+b=ab+1$$

elevando ambos lados

$$a^2+2ab+b^2 = a^2b^2+2ab+1$$

$$a^2+b^2-a^2b^2=1.$$