XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL I
Jueves 10 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#1 Don Vicente le comenta a su hija Brenda que abrirá una cuenta de ahorro para tener recursos para el ingreso a la Universidad. Mes a mes incrementa la cuota de ahorro en un monto fijo. Al cabo de seis meses la hija le pregunta ¿cuánto ahorró este mes papá? A lo que don Vicente responde que 42 500 colones. Al año de abierta la cuenta de ahorros su hija vuelve a preguntar ¿Papá, cuánto ahorró este mes? y don Vicente le indica que 45 500 colones. Si transcurridos 5 años desde que se inició el ahorro Brenda debe ingresar a la Universidad, ¿de cúanto dinero dispone?

Solución:

Si a los 6 meses ahorró 42 500 y al año (12 meses) ahorró 45 500 entonces el incremento de la cuota corresponde a:

$$\frac{45\,500 - 42\,500}{6} = 500$$

Luego, el monto inicial del ahorro está dado por:

$$42\,500 - 500(6-1) = 40\,000$$

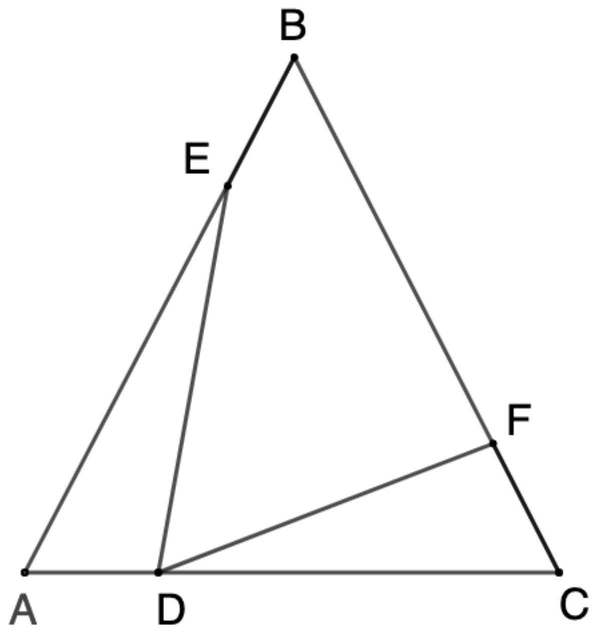
De esta forma se establece una susesión arítmetica que permite determinar el monto aportado mes a mes:

$$a_m = 40\,000 + 500(m-1), m : \text{cantidad de meses}$$

Transcurridos 5 años (60 meses) la cuota aportada corresponde a $40\,000 + 500(60-1) = 69\,500$. Finalmente, se debe determinar la suma total de cuotas aportadas, es decir,

$$\begin{aligned} s &= 40\,000 + 40\,500 + 41\,000 + ... + 69\,500 \\ &= 40\,000 + (40\,000 + 500 \cdot 1) + (40000 + 500 \cdot 2) + ... + (40000 + 500 \cdot 59) \\ &= 60 \cdot 40\,000 + 500(1 + 2 + 3 + ... + 59) \\ &= 2\,400\,000 + 500 \cdot \frac{59 \cdot 60}{2} \\ &= 2\,400\,000 + 885\,000 \\ &= 3\,285\,000 \end{aligned}$$

#2 Considere la siguiente figura en la cual se tiene que $\triangle ABC$ es equilátero, $\overline{AD} \cong \overline{FC}$ y $\angle AED \cong \angle FDC$.



Si el área del $\triangle ADE$ es $\dfrac{1}{9}$ del área del $\triangle ABC$ determine la razón entre las áreas del $\triangle EDF$ y del $\square AEFD$: $\dfrac{(EDF)}{(AEFD)}$

Solución:

Tenemos $\angle BAC \cong \angle ACB$, por ser $\triangle ABC$ equilátero, además $\overline{AD} \cong \overline{FC}$ y $\angle AED \cong \angle FDC$, entonces $\triangle ADE \cong \triangle CFD$ y así $(ADE) = (CFD) = \dfrac{1}{9}(ABC)$

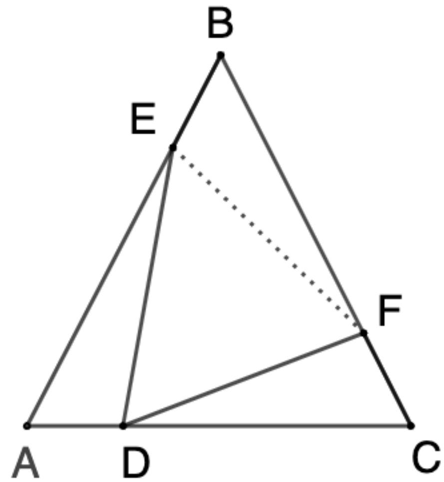
Como $\triangle ADE \cong \triangle CFD$ entonces $\overline{AE} \cong \overline{DC}$, así tenemos:

$AB = AC \Rightarrow AE + BE = CD + AD \Rightarrow AE + BE = AE + AD \Rightarrow BE = AD$

Como $\overline{AD} \cong \overline{FC}$, así tenemos:

$BC = AC \Rightarrow BF + FC = DC + AD \Rightarrow BF + FC = DC + FC \Rightarrow BF = DC$

Trazamos $\overline{EF}$, así tenemos



Con $\triangle BEF \cong \triangle CFD$ y así $(BEF) = (CFD) = \dfrac{1}{9}(ABC)$

Ahora tenemos $(EDF) = (ABC) - (CFD) - (ADE) - (BEF) = \dfrac{2}{3}(ABC)$.

Así $(AEFD) = (ADE) + (EDF) = \dfrac{7}{9}(ABC)$

Entonces $\frac{(EDF)}{(AEFD)} = \dfrac{\frac{2}{3}(ABC)}{\frac{7}{9}(ABC)} = \dfrac{6}{7}$

#3 En una pizarra están escritos los números $1, 2, 3, \ldots, 2020$. Sobre estos números se pueden efectuar las siguientes operaciones:

- Se escoge a, b, con $a \neq b$, y se reemplaza por $a + b$.
- Se escoge a, b, con $a \neq b$, y se reemplazan por ab.

Si se continúa con esas operaciones hasta que solo que un número en la pizarra, determine el valor máximo posible para el número que puede quedar escrito.

Solución:

Primero, observe que si $a \geq 2$, entonces $b \geq 3$. Luego,

$$a + b \leq b + b < b + b + b = 3b \leq ab.$$

En consecuencia, si se escoge dos elementos cualesquiera $a, b \in C$, con $a \neq b$, $a \neq 1$ y $b \neq 1$, siempre el producto maximiza el resultado. Por otro lado, es fácil ver que

$$1 \cdot n = n < n + 1,$$

para cualquier elemento $n \in C$, con $n \neq 1$. Es suficiente determinar con cual número debe sumarse 1 para maximizar el resultado. Sean $a, b \in C$, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces

$$ab + 1 \leq ab + a = a(b+1).$$

Esto implica que si se suma 1 a uno de los elementos originales, el resultado será el mayor posible. Es decir, el valor máximo posible es de la forma

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (a-1) \cdot (a+1) \cdot (a+1)(a+2) \cdots 2020 = \frac{a+1}{a} \cdot 2020!,$$

donde $a \in \{2, 3, \ldots, 2020\}$. Finalmente, resta determinar con cual de los elementos de $\{2, 3, \ldots, 2020\}$ debe sumarse 1. Para esto, observe que

$$\begin{aligned} a \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a \geq 2a + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a \geq 2(a+1) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq \frac{a+1}{a}. \end{aligned}$$

En particular, el valor máximo posible se obtiene si se suma 1 con $a = 2$. Por lo tanto, el valor máximo posible es

$$M = \frac{3}{2} \cdot 2020!$$