XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL I
Lunes 14 de Noviembre de 2022
Tiempo disponible: 3 horas

#1 Durante la final de OLCOMA se hace una gran competencia entre personas exolímpicas, en la cual participan, Daniel, Colleen y Kimberly. La carrera toma tal relevacia que vienen tres medios de comunicación a cubrirla y cada medio hace dos afirmaciones, una falsa y una verdadera:

Olco-news indica:

a) El ganador no fue Daniel.

b) La ganadora no fue Colleen.

Olco-noticias reporta:

a) Colleen llegó de última.

b) Daniel llegó antes que Kimberly

Tele-OLCOMA comunica:

a) Colleen llegó antes que Kimberly.

b) Kimberly llegó antes que Daniel

Con base en estos datos, determine justificadamente cual persona participante llegó de última y cual llegó de primero (en caso de que no se pueda, justificar por qué no se puede).

Solución

Analizaremos cada una de las afirmaciones del Olco-news, para ver cuales de ellas son consistentes ente si.

Si la afirmación *El ganador no fue Daniel* es falsa entonces Daniel sería el ganador de la competencia, por lo que la afirmación *Daniel llegó antes que Kimberly* es verdadera y así la afirmación *Colleen llegó de última* sería falsa, y de esa forma Collen llegó de segunda, y Kimberly de última, lo cual no contradice las afirmaciones de Tele-OLCOMA dado que la afirmación *Colleen llegó antes que Kimberly* sería verdadera y la afirmación *Kimberly llegó antes que Daniel* sería falsa.

Entonces el orden de los competidoras sería Daniel-Colleen-Kimberly.

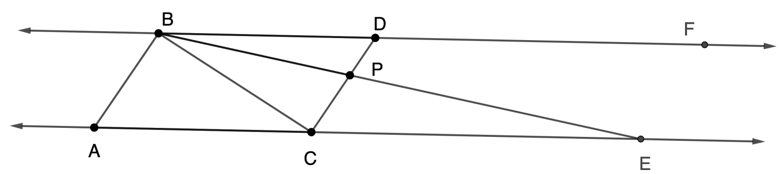
Si la afimación *El ganador no fue Daniel* es verdadera entonces la afirmación *La ganadora no fue Colleen* es falsa, por lo que Collen fue la ganadora de la competencia, y entonces la afirmación

Daniel llegó antes que Kimberly es verdadera por lo que Daniel llegó de segundo y Kimberly de última, lo cual no contradice las afirmaciones de Tele-OLCOMA dado que la afirmación *Colleen llegó antes que Kimberly* sería verdadera y la afirmación *Kimberly llegó antes que Daniel* sería falsa.

Entonces el orden de los competidoras sería Colleen-Daniel-Kimberly.

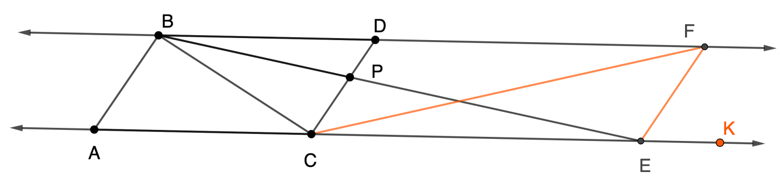
Notamos que en ambos casos se llega a la conclusión de que Kimberly llegó de última, pero no es posible determinar quien llegó de primero, dado que bajo el primer escenario llega Daniely bajo el segundo Colleen.

#2 Dada la siguiente figura se tiene que $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, $AB = BC = BP$, además $m\angle BAC = 50°$ y $m\angle FCE + m\angle CFE = 60°$.



Determine $m\angle DBP + m\angle BPC$.

Solución



a) Dibujando un punto K sobre la recta AC, se forma el $\angle FEK$, que corresponde a un ángulo externo del $\triangle CFE$, por lo que su medida se puede calcular mediante la suma de los dos ángulos internos no adyacentes, $m\angle FCE + m\angle CFE = 60°$.

b) El $\angle FEK$ es correspondiente con el $\angle DCE$, por lo miden igual, o sea la $m\angle DCE = 60°$.

c) Como se sabe que $\overline{AB} = \overline{BC}$, además el $m\angle BAC = 50°$ entonces el $m\angle BAC = m\angle ACB = 50°$.

d) Entonces la $m\angle ABC = 80°$, ya que es lo que le falta para que $m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180°$, por ser los tres ángulos internos de un triángulo.

e) Como se sabe que $\overline{BC} = \overline{BP}$, entonces el $m\angle PCB = m\angle BPC$ y en (b) se determinó que el $m\angle DCE = 60°$, además el $m\angle ACB = 50°$ (c), por lo que $m\angle PCB = 180° - m\angle ACB - m\angle DCE = 180° - 50° - 60° = 70°$, entonces el $m\angle PCB = 70°$ y el $m\angle BPC = 70°$, porque son ángulos opuestos a lados de igual medida en un mismo triángulo, por lo que miden igual.

f) Entonces la $m\angle CBP = 40°$, ya que es lo que le falta para que $m\angle BCP + m\angle BPC + m\angle CBP = 180°$, por ser los tres ángulos internos de un triángulo.

g) Como el $\angle ACB$ es Alterno Interno con el $\angle CBD$, entonces tienen la misma medida y se sabe que miden $50°$ (c), y como el $m\angle CBP = 40°$ (f), entonces el $m\angle DBP = 10°$, porque $m\angle DBP = m\angle CBD - m\angle CBP = 50° - 40° = 10°$.

h) El $\angle BPC = 70°$ (e) y $\angle DBP = 10°$ (g), entonces $70° + 10° = 80°$, que es lo se le solicitaba determinar.

#3 David está buscando un número entero positivo A que cumpla las siguientes condiciones:

- El número A multiplicado por 15 da un cuadrado perfecto.
- El número A multiplicado por 10 da un cubo perfecto.
- El número A multiplicado por 6 da una potencia de grado cinco perfecta.

Determine cuál es el menor número A que David puede obtener.

Nota:
Un número se dice cuadrado perfecto si es de la forma a^2*, por ejemplo 49 es un cuadrado perfecto porque* $49 = 7^2$
Un número se dice cubo perfecto si es de la forma a^3*, por ejemplo 216 es un cubo perfecto porque* $216 = 6^3$
Un número se dice potencia de grado cinco perfecta si es de la forma a^5*, por ejemplo 32 es una potencia de grado cinco perfecta porque* $32 = 2^5$

Solución

El número A tiene que tener como factores primos a $2, 3, 5$.
Vamos al calcular los exponentes para cada una de esas potencias.
Respecto al exponente de 5, que llamaremos n, sabemos por la regla a) que debe ser un múltiplo de 2 y sobra un 1,es decir, el exponente es $n = 2k_1 + 1$.
De la regla b), sabemos que el exponente debe ser un múltiplo de 3 más dos unidades, pues cuando se le agrega el factor del 5 que hay en el 10 debe dar cubo perfecto, es decir $n = 3k_2 + 2$
De la regla c), sabemos que el exponente debe ser un múltiplo de 5, es decir $n = 5k_3$.
El menor número que cumple las tres formas es $n = 5$.
Al exponente del 3 le llamaremos m.
De la regla a) tenemos que $m = 2k_1 + 1$
De la regla b) tenemos que $m = 3k_2$
De la regla c) tenemos que $m = 5k_3 + 4$
El menor número que cumple esto es $m = 9$.

Al exponente del 2 le llamaremos r.
De la regla a) tenemos que $r = 2k_1$
De la regla b) tenemos que $r = 3k_2 + 2$
De la regla c) tenemos que $r = 5k_3 + 4$
El menor número que cumple esto es $r = 14$.

Así el menor número $A = 2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5$.