XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 2 - NIVEL I
Viernes 11 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#4 Un juego consiste de una cuadrícula de m filas y n columnas y una única ficha colocada en la casilla de la esquina inferior izquierda. Andrea y Beatriz mueven alternadamente esta única ficha, la cual se puede desplazar horizontalmente hacia la derecha o verticalmente hacia arriba tantos espacios como se quiera pero solamente en esas direcciones,, y gana el que la coloque en la casilla de la esquina superior derecha. Si Andrea hace el primer movimiento, determine, si existe, una estrategia ganadora para alguna de las dos jugadoras, dependiendo de los valores de m y n.

Solución:

Numeremos las filas y las columnas empezando por la esquina superior derecha (casilla de meta) y llamemos (a, b) a la casilla que está en la fila a y columna b. Lamemos *casilla ganadora* a cualquier casilla en la cual el jugador que coloque la ficha se asegura ganar el juego y *casilla perdedora* a cualquier casilla desde la cual el jugador que sigue puede llevar la ficha a una casilla ganadora; también se puede decir que una casilla es ganadora si el jugador que sigue se ve obligado a moverse a una casilla perdedora.

Así por ejemplo, la casilla $(1, 1)$ es ganadora pues el que coloca la ficha ahí gana el juego; todas las casillas de la primera fila y primera columna, excepto la casilla $(1, 1)$, son perdedoras pues si un jugador coloca la ficha ahí el siguiente jugador gana en el siguiente movimiento pues puede desplazar la ficha tantas casillas como quiere hacia arriba o hacia la derecha; la casilla $(2, 2)$ es ganadora porque si un jugador coloca la ficha ahí el siguiente jugador se ve obligado a moverla a una casilla perdedora, específicamente a la casilla $(1, 2)$ o $(2, 1)$.

Todas las casillas de la segunda fila y segunda columna, excepto la casilla $(2, 2)$, son perdedoras pues si un jugador coloca la ficha ahí el siguiente puede llevar la ficha a la casilla ganadora $(2, 2)$ en el siguiente movimiento pues puede desplazar la ficha tantas casillas como quiere hacia arriba o hacia la derecha. Siguiendo con el mismo análisis se observa que todas las casillas (a, a) son ganadoras y todas las casillas (a, b) con $a \neq b$ son perdedoras.

Como inicialmente la ficha está en la casilla (m, n) se tiene los siguientes casos:
Si $m \neq n$ el primer jugador tiene una estrategia ganadora moviendo la ficha a la casilla (m, m)

o (n, n) según corresponda, y en cada jugada moverla a la casilla (a, a).
Si $m = n$ entonces es el segundo jugador el que tendrá la estrategia ganadora, pues el primer jugador, en su primera jugada, necesariemente debe mover la ficha a una casilla perdedora, a partir de ahí el segundo jugador utiliza la estrategia mencionada en el caso anterior.

#5 Determine la cantidad de números de 3 dígitos de la forma $n = abc$ con (a, b, c dígitos distintos, $c \neq 0$) tales que $abc - cba$ posea exactamente 18 divisores positivos.

- Solución:

$$\begin{aligned} m = abc - cba &= (a10^2 + b10^1 + c) - (c10^2 + b10^1 + a) \\ &= a10^2 - a + b10 - b10 + c - c10^2 \\ &= 99(a - c) \\ &= 9 \cdot 11(a - c) \\ &= 3^2 \cdot 11(a - c) \end{aligned}$$

Para que m posea exactamente 18 divisores positivos se requiere que el factor $a - c$ sea un cuadrado perfecto diferente de 1 y 9, b arbitrario. De esta forma $a - c = 4$.

- Si $a = 9$, $c = 5$, entonces $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ para un total de 8 números.

- Si $a = 8$, $c = 4$, entonces $b \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ para un total de 8 números.

- Si $a = 7$, $c = 3$, entonces $b \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ para un total de 8 números.

- Si $a = 6$, $c = 2$, entonces $b \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ para un total de 8 números.

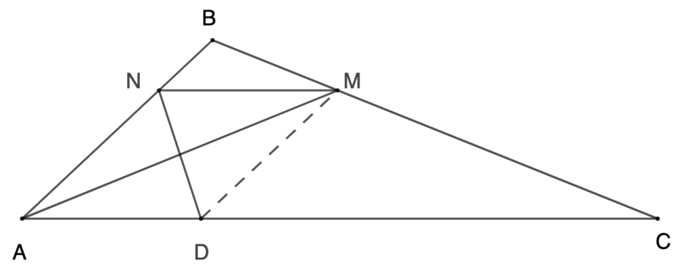
- Si $a = 5$, $c = 1$, entonces $b \in \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ para un total de 8 números.

Así, la cantidad de números que cumplen lo indicado son 40.

#6 Sean el $\triangle ABC$, M un punto tal que $B - M - C$ y $\overline{AM}$ biseca al $\angle BAC$, N un punto tal que $A - N - B$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, D un punto tal que $A - D - C$ y $\overline{ND}$ bisecal al $\angle ANM$. Si $\angle NDM \cong \angle BMD$ y $m\angle ABC - m\angle ACB = 80°$, determine $m\angle ABC$.

Solución:

Considere la figura



$\angle NAM \cong \angle DAM$ dado que $\overline{AM}$ biseca al $\angle BAC$, además $\angle DAM \cong \angle NMA$ por ser alternos internos entre paralelas, y entonces $\triangle ANM$ es isósceles con $\overline{AN} \cong \overline{MN}$.

De forma análoga $\triangle AND$ es isósceles con $\overline{AN} \cong \overline{AD}$ y $\triangle ADM$ es isósceles con $\overline{AD} \cong \overline{DM}$, entonces $\overline{MN} \cong \overline{AN} \cong \overline{AD} \cong \overline{DM}$, y así $\square MNAD$ es un rombo, además $\angle MND \cong \angle NDM$ y $\overline{AN} \parallel \overline{MD}$.

De lo anterior $m\angle ABC + m\angle BMD = 180°$ por ser conjugados entre paralelas, además por hipótesis tenemos que $m\angle ABC = 80° + m\angle ACB$ y así $m\angle ACB = 100° - m\angle BMD$.

Por otra parte, $m\angle ANM + m\angle MNB = 180°$ por ser par lineal entonces $2m\angle BMD + m\angle BAC = 180°$ y así tenemos:

$2m\angle BMD + 180° - m\angle ABC - m\angle ACB = 180° \Rightarrow 2m\angle BMD - 80° - 2m\angle ACB = 0$

Así $m\angle BMD - m\angle ACB = 40°$ y entonces :

$m\angle BMD - m\angle ACB = 40° \Rightarrow m\angle BMD - 100° + m\angle BMD = 40° \Rightarrow 2m\angle BMD = 140°$

De esta manera $m\angle BMD = 70°$ y así $m\angle ACB = 30°$ de donde se tiene que $m\angle ABC = 110°$