XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 2 - NIVEL I

Martes 15 de noviembre de 2022
Tiempo disponible: 3 horas

#4 Carlos y Juan hacen una competencia con el juego de ”los fosforillo”, el cual consiste en colocar sobre una mesa dos puñados de cinco fósforos cada uno. Cada jugador, por turno, puede sacar un solo fósforo de uno de los dos grupos, o un fósforo de cada puñado. Pierde el jugador que saca el último fósforo. Determine si existe estrategia ganadora para algún jugador, y explíquela.

Solución

Construyendo un tablero 6×6 como la siguiente figura:

5	4	3	2	1	0	
						0
						1
						2
						3
						4
						5

numeramos las filas y las columnas desde el 0 hasta el 5 en el orden que se muestra allí. La posición (i, j) significará que al tomar uno o dos fósforos quedarán en el juego i fósforos en uno de los puñados y j fósforos en el otro. Claramente, la posición ”perdedora.es la (0, 0) dado que esto significa que tomó el último fósforo y esta dejando 0 fósforos en los dos puñados, y a partir de allí haremos el análisis ”hacia atrás”de las posiciones ”ganadoras”(**G**) y ”perdedoras”(**P**) del juego.

Sabemos que la posición (0,0) es ”perdedora”por tanto la posición (1,0) es ganadora dado que le esta quedando un fósforo al otro jugador y esto significa que perderá, análogamente la posición (0,1) es ganadora.

5	4	3	2	1	0	
				G	**P**	0
					G	1
						2
						3
						4
						5

Analizando la posición (2,0) es una posición ”Perdedoraza que al quedar dos fósforos disponibles el otro participante tomará 1 fósforo y esto lo hará perder, análogamente con la posición (0,2).

5	4	3	2	1	0	
			P	**G**	**P**	0
					G	1
					P	2
						3
						4
						5

Acabaremos con un tablero como siguiente figura

5	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	
G	***P***	***G***	***P***	***G***	***P***	*0*
P	***P***	***P***	***P***	***P***	***G***	*1*
P	***G***	***P***	***G***	***P***	***P***	*2*
P	***P***	***P***	***P***	***P***	***G***	*3*
P	***G***	***P***	***G***	***P***	***P***	*4*
P	***P***	***P***	***P***	***P***	***G***	*5*

La estrategia ganadora la tiene el primer jugador, quien debe en la primera jugada quitar un fósforo de cada puñado, y luego seguir jugando según indica la tabla.

Solución alternativa: Llamemos le a los jugadores A y B, donde A juega primero que B. Vamos a probar que A tiene la estrategia ganadora.
En su primer turno A quita un fósforo de cada puño. Dejando ambos grupos con cuatro fósforos. Sin importar que jugada haga B, alguno de los grupos va a quedar con un numero impar. Analizamos los casos

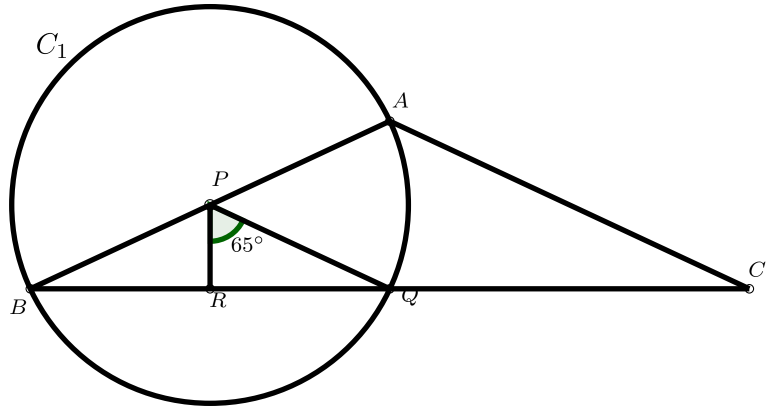
a) Si los puños quedan con cantidades de fósforos de distinta paridad, el jugador A saca un fósforo del puño que tiene un numero impar, y asi deja ambos puños con una cantidad par de elementos.

b) Si ambos puños tiene un numero impar de elementos, A le saca un fósforo a cada puño, y de este modo logra que ambos puños vuelvan a quedar con un numero par de elementos.

Por tanto A le deja a B ambos puños con un numero par de elementos, y como quiera que B juegue, le deja al menos un puño con un numero impar de elementos a A. Por tanto A puede continuar con la misma estrategia.
El jugador A va a jugar de este modo hasta que B le deje algun puño con exactamente un fósforo. Sin perdida de generalidad, el primer grupo tiene un fósforo y el segundo grupo tiene n fósforos. Si n es par, entonces A quita un fósforo de cada grupo, lo cual hace que el grupo 2 quede con un numero impar de elementos. Acto seguido, A y B le van a quitar un fósforo a este grupo de forma alternada, y B va a quitar el ultimo fósforo. Si n es impar, entonces A quita el fósforo del grupo 1, y vuelve a la condición de la situación anterior, donde obliga a B a quitar el ultimo fósforo.

#5 Sea el $\triangle ABC$, con $\angle BAC$ obtuso. Sea C_1 una circunferencia con centro P y diámetro $\overline{AB}$. El punto medio de $\overline{BC}$ es Q y R es un punto en $\overline{BC}$ tal que $\overline{PR} \perp \overline{BC}$. El punto Q pertenece a la circunferencia C_1. Si $\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ y $m\angle QPR = 65°$, determine $m\angle BAC$.

Solución



Como $\overline{PR} \perp \overline{BC}$, en ángulo $\angle PRQ = 90$
Por suma de ángulos internos $m\angle PQR = 180 - 65 - 90 = 25$
Como $\overline{PQ}$ y $\overline{PB}$ son radios de la misma circunferencia entonces $PB = PQ$ y el triangulo $\triangle PBQ$ es isósceles.
$m\angle QBP = 25$.
Por suma de ángulos internos $m\angle BPR = 65$.
Entonces $m\angle BPQ = 130$.
Como $\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ entonces los ángulos $\angle BPQ$ y $\angle BAC$ son correspondientes entre paralelas.
Entonces $m\angle BAC = 130$.

#6 Diana escribe en la pizarra los primeros 8 números primos en fila, en orden creciente. Luego Maricruz escribe en otra fila, debajo de cada dos números en posiciones consecutivas escritos por Diana, el resultado de la multiplicación de estos dos números. Luego, Diana escribe en otra fila, debajo de cada dos números en posiciones consecutivas escritos por Maricruz, el resultado de la multiplicación de estos dos números, y así continúan hasta llegar a obtener un solo número. Determine la cantidad de factores primos, no necesariamente distintos, del número en la última fila.

Solución

Un fragmento del arreglo escrito en la pizarra se muestra en la siguiente figura.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & & 3 & & 5 & & 7 & & 11 & & 13 & & \cdots \\
& 6 & & 15 & & 35 & & 77 & & 143 & & \cdots & \\
& & 90 & & 525 & & 2695 & & 11011 & & \cdots & & \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Ahora, observe que cada elemento de la primera fila tiene exactamente un factor primo. Por otro lado, todos los números de la segunda fila son producto de dos primos distintos, por lo que cada uno tiene exactamente dos factores primos. Siguiendo con el mismo razonamiento, se puede ver que cada elemento de una fila dada tiene la misma cantidad de factores primos, no necesariamente distintos, pues se obtiene exactamente en la misma forma que cualquier otro, de modo que basta ir calculando los que se van obteniendo por la izquierda hacia abajo. De acuerdo con los datos anteriores, en el paso k se multiplican dos números que tienen los mismos exponentes en la factorización prima, pero el primero comienza con 2 y termina con el primo $k-1$, y el segundo número comienza con 3 y termina con el primo k, es decir, en el paso siguiente, se conservan los primos y se suman los exponentes. En este caso, se puede ir calculando los exponentes al multiplicar los números en las posiciones 1 y 2 en cada fila. Por ejemplo, para la fila 2 se tiene

$$2 \cdot 3,$$

para la fila 3 se tiene

$$(2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

para la fila 4 se tiene

$$(2 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

A partir de lo anterior, se van obtiendo los siguientes números

1	2
2	$2 \cdot 3$
3	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$
4	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$
5	$2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11$
6	$2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10} \cdot 7^{10} \cdot 11^5 \cdot 13$
7	$2 \cdot 3^6 \cdot 5^{15} \cdot 7^{20} \cdot 11^{15} \cdot 13^6 \cdot 17$
8	$2 \cdot 3^7 \cdot 5^{21} \cdot 7^{35} \cdot 11^{35} \cdot 13^{21} \cdot 17^7 \cdot 19$

En particular, el último número es

$$2 \cdot 3^7 \cdot 5^{21} \cdot 7^{35} \cdot 11^{35} \cdot 13^{21} \cdot 17^7 \cdot 19\,,$$

por lo que la cantidad de factores primos de este número es

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7.$$

Nota: Se puede observar que los exponentes tienen la forma de los coeficientes en la expansión del binomio de Newton, es decir, el exponente del primo k de los 12 escogidos es $\binom{12}{k}$.