XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL II
Jueves 10 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#1 Sean a, b números reales positivos tal que $a < 8$ y $b < 1$, demostrar que

$$0 < 8ab^2 - (ab)^2 \leq 4^2$$

Solución Primero hay que notar que $8ab^2 - (ab)^2 = ab^2(8 - a) > 0$, por otra parte, como $b < 1$ y b es positivo entonces $b^2 < b$ y como $b < 1$ con lo cual $b^2 < 1$.
Como $b^2 < 1$ y multiplicando por el número positivo $a(8 - a) > 0$ se tiene que:
$b^2a(8 - a) < a(8 - a) = 8a - a^2 = 16 - 16 + 8a - a^2 = 16 - (4 - a)^2 \leq 16$.
Por lo tanto $8ab^2 - (ab)^2 \leq 16$.

#2 Maricela tiene una cuadricula de 11 filas por 10 columnas y pinta 56 casillas. Descubre que hay por lo menos seis casillas coloreadas que se encuentran en filas y columnas diferentes entre sí, es decir, de esas seis casillas todas se encuentran en seis filas distintas y seis columnas distintas.
En una nueva cuadricula de las mismas dimensiones, pinta nuevamente 56 casillas y nuevamente obtiene por lo menos seis casillas que se encuentras en filas y columnas diferentes entre sí. ¿ Siempre que Maricela pinte 56 casillas del tablero de 10 por 11 obtendrá por lo menos 6 casillas en filas y columnas distintas entre sí? Explique

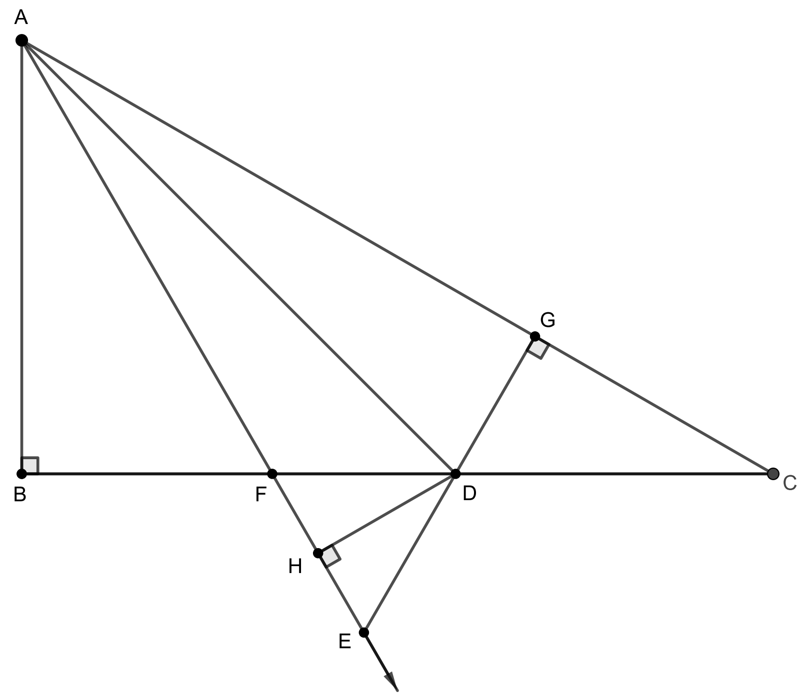
Solución:

Dado que 56 casillas (palomas) se colocan en once filas del tablero (casilleros), y 56 = 5 X 11 + 1, según el Principio del palomar, existe una fila A con al menos seis casillas coloreadas.
Si eliminamos la fila A, nos quedarán diez filas (casilleros) con al menos 56 -10 = 46 casillas coloreadas (palomas) en ellas. Dado que 46 = 10 x4 + 6, según el principio del casillero, hay una fila B entre las diez filas con al menos cinco casillas coloreadas.
Ahora eliminamos las filas A y B. Nos quedan nueve filas (casilleros) y al menos 46 -2x10 =36 casillas coloreadas (palomas) en ellas. Dado que 36=9X 3+ 9, según el principio del casillero, hay una fila C entre las nueve filas con al menos cuatro casillas coloreadas.
Ahora eliminamos las filas A , B y C. Nos quedan ocho (casilleros) y al menos 36 -3x10 =26 casillas coloreadas (palomas) en ellas. Dado que 26=8X 3+ 2, según el principio del casillero, hay una fila D entre las ocho filas con al menos cuatro casillas coloreadas.
Ahora eliminamos las filas A, B, C y D. Nos quedan siete filas (casilleros) y al menos 46 -4x10 =16 casillas coloreadas (palomas) en ellas. Dado que 16=7X 2+ 2, según el principio del casillero, hay una fila E entre las siete filas con al menos tres casillas coloreadas.
Ahora eliminamos las filas A, B, C, D y E. Nos quedan seis filas por tanto hay una fila F entre

las seis filas con al menos una casilla coloreada.
Ahora estamos listos para seleccionar las seis casillas coloreadas requeridas. Primero elegimos cualquier casilla P1 de la fila F, sabemos que al menos existe una allí.
A continuación, elegimos la segunda cuadricula coloreada P2 de la fila E que no está en la misma columna que P1. Esto también se puede hacer, porque existen al menos tres casillas coloreadas en la fila F.
Luego, elegimos la tercera cuadricula coloreada P3 de la fila D que no está en la misma columna que P1 ni P2. Esto también se puede hacer, porque existen al menos cuatro casillas coloreadas en la fila D.
Luego, elegimos la cuarta cuadricula coloreada P4 de la fila C que no está en la misma columna que P1,P2 ni P3. Esto también se puede hacer, porque existen al menos cuatro casillas coloreadas en la fila C.

Elegimos la quinta cuadricula coloreada P5 de la fila B que no está en la misma columna que P1,P2 ,P3 ni P4. Esto también se puede hacer, porque existen al menos cinco casillas coloreadas en la fila B.
Finalmente, elegimos la quinta cuadricula coloreada P6 de la fila A que no está en la misma columna que P1,P2 ,P3, P4 ni P5. Esto también se puede hacer, porque existen al menos seis casillas coloreadas en la fila A.
Por tanto, siempre que Maricela pinte esas casillas obtendrá 6 casillas coloreadas en filas y columnas distintas entre sí.

#3 Considere el triángulo $\triangle ABC$, donde $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del $\angle BAC$, sean F y D puntos en el segmento $\overline{BC}$, y G en $\overline{AC}$ tal que $\dfrac{|AF|}{|AC|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|FD|}{|DG|}$, además sea H en $\overline{AE}$ tal que $|HD| = |DG|$, con $E - D - G$. Determine la $m\angle AED + m\angle ADG$



Solución

Como $|HD| = |DG|$ entonces los triángulos $\triangle AFD$ y $\triangle ADC$ tiene la misma altura con respecto a las bases $\overline{AF}$ y$\overline{AC}$ respectivamente, por lo tanto

$$\frac{(AFD)}{(ADC)} = \frac{\frac{|AF||HD|}{2}}{\frac{|AC||DG|}{2}} = \frac{|AF|}{|AC|}$$

Pero por otra parte

$$\frac{(AFD)}{(ADC)} = \frac{\frac{|FD||AB|}{2}}{\frac{|DC||AB|}{2}} = \frac{|FD|}{|DC|}$$

Por lo tanto
$\dfrac{|FD|}{|DC|} = \dfrac{|AF|}{|AC|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|FD|}{|DG|}$
$\dfrac{1}{|DC|} = \dfrac{1}{2|DG|}$con lo cual $|DC| = 2|DG|$.
Por lo tanto el $\triangle DGC$ es el triángulo especial $30°$, $60°$ y $90°$.
Con $m\angle DCG = 30°$, $m\angle GDC = 60°$ y $m\angle BAC = 60°$

Además los triángulos rectángulos $\triangle ADH$ y $\triangle ADG$ comparten la hipotenusa y los catetos $\overline{HD}$ y $\overline{DG}$ son congruentes por lo tanto, $\triangle ADH \cong \triangle ADG$ lo que implica que $\angle HAD \cong \angle GAD$. Como $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del $\angle BAC$, entonces $m\angle DAG = \dfrac{1}{4} m\angle BAC = \dfrac{1}{4} \cdot 60^\circ = 15^\circ$, lo que implica que $m\angle ADG = 75^\circ$. Finalmente como $m\angle EAC = 30^\circ$ se tiene que $m\angle AED = 60^\circ$. Con lo cual $m\angle AED + m\angle ADG = 135^\circ$