XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 2 - NIVEL II
Viernes 11 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#4 Sean a y b números enteros positivos, con a primo. Determine todos los pares ordenados (a, b), tales que $12\,(a+23) = 1+2+3+4+\cdots+b$.

Solución:

$$\begin{aligned}
& 12\,(a+23) = 1+2+3+4+\cdots+b \\
\Rightarrow\quad & 12\,(a+23) = \frac{b\,(b+1)}{2} \\
\Rightarrow\quad & 24\,(a+23) = b^2+b \\
\Rightarrow\quad & 24a+552 = b^2+b \\
\Rightarrow\quad & 24a = b^2+b-552 \\
\Rightarrow\quad & 24a = (b+24)\,(b-23) \\
\Rightarrow\quad & 2^3\cdot 3\cdot a = (b+24)\,(b-23)
\end{aligned}$$

Se analizan las siguientes posibilidades:

• Si $b+24=1 \Rightarrow b=-23$ (no admite solución este caso)

• Si $b+24=2^3=8 \Rightarrow b=-16$ (no admite solución este caso)

• Si $b+24=2^3\cdot 3=24 \Rightarrow b=0$ (no admite solución este caso)

• Si $b+24=3 \Rightarrow b=-21$ (no admite solución este caso)

• Si $b+24=3\cdot a \Rightarrow b-23=2^3=8 \Rightarrow b=31$ y se tendría $a=55/3$ (no admite solución este caso)

• Si $b+24=2^3\cdot a \Rightarrow b-23=3 \Rightarrow b=26$ y se tendría $a=50/3$ (no admite solución este caso)

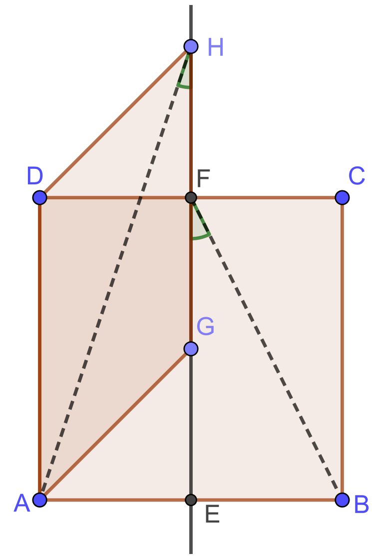
• Si $b+24=2^3\cdot 3\cdot a \Rightarrow b-23=1 \Rightarrow b=24$ y se tendría $a=2$; luego, el par $(2,24)$ es una solución

• Si $b+24=a \Rightarrow b-23=2^3\cdot 3 \Rightarrow b=24+23=47$ y se tendría $a=71$; luego, el par $(71,47)$ es una solución

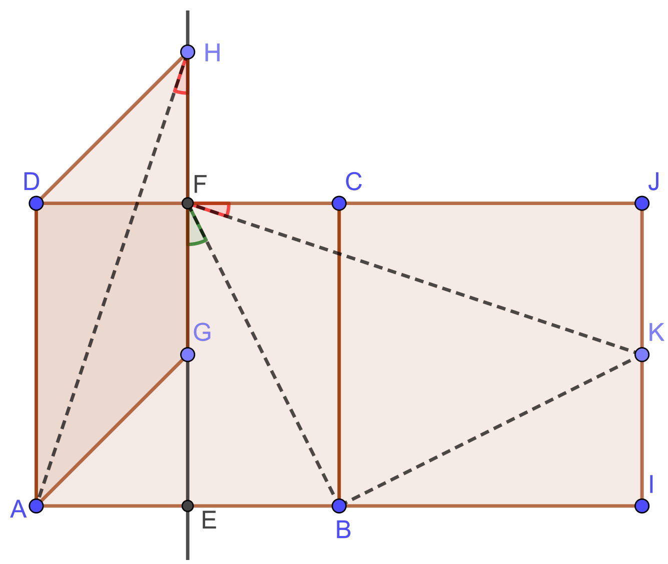
Así, las únicas dos soluciones son $(2,24)$ y $(71,47)$ (note que por paridad no son analizados los otros casos, pues $b+24$ y $b-23$ poseen paridad distinta -sin embargo, si se analizan no estaría mal, pues de alguna manera se bebe justificar la unicidad de la solución acá indicada).

#5 Sea $\square ABCD$ un cuadrado, sean E y F los puntos medios de los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, sean G y H los puntos en $\overleftrightarrow{EF}$ tal que el $\square AGHD$ es un paralelogramo. Si F es el punto medio del $\overline{GH}$ determine la $m\angle EFB + m\angle FHA$.

Solución



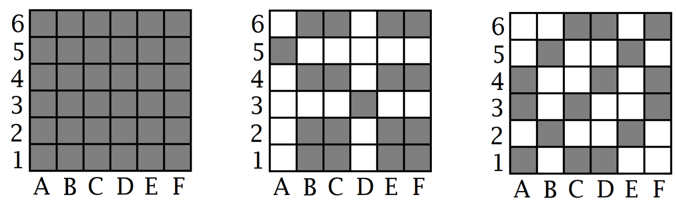
Construya el cuadrado $\square BIJC$ congruente al cuadrado $\square ABCD$, como se muestra en la figura.



Sea $x = EG$, entonces $EF = 2x = BI$, $IK = x$, por criterio $L-A-L$ los $\triangle FEB$ y $\triangle BIK$ son congruentes, de igual manera $EH = 3x = FJ$ y $AE = KJ = x$ por tanto los $\triangle AEH$ y $\triangle KJF$ son congruentes. Por lo anterior $m\angle FHA = m\angle KFJ$.
Por otra parte como $m\angle EFB + m\angle EBF = 90°$, entonces $m\angle IBK + m\angle EBF = 90°$ con lo cual $m\angle FBK = 90°$ y el $\triangle FBK$ es un triángulo rectángulo isósceles, por tanto $m\angle BFK = 45°$, finalmente $m\angle EFB + m\angle FHA = 45°$

#6 En un tablero 6×6, como los de las figuras, cada una de las casillas tiene un bombillo y un botón. Cada uno de los 36 bombillos tiene dos estados, encendido y apagado; cada uno de los 36 botones se puede presionar a lo sumo una vez y solo se puede presionar un botón en cada momento. Cuando el botón de una casilla se presiona, cambia el estado de las 11 bombillos que se encuentran en su misma fila y columna (el bombillo de la casilla del botón también cambia). Por ejemplo, la segunda figura muestra el estado del tablero luego de empezar como en la primera figura y presionar los botones en $A3$ y $D5$.

Para cualesquiera dos configuraciones del tablero se sabe que es posible transformar una en la otra presionando un conjunto único de botones, considerando que el orden en que se presionen los botones no altera el resultado. Enliste las casillas de los botones que deben presionarse para transformar la configuración de la primera figura en la tercera figura (que representa la cabeza de Olcomae).



Solución:

La cabeza de Olcomae es simétrica (por reflexión) con respecto a las diagonales del cuadrado. Dado que el conjunto de botones que hay que presionar para llevar la configuración original en la cabeza de Olcomae es único, entonces la solución debe ser simétrica con respecto a las dos diagonales.

Podemos representar el hecho de presionar un botón determinado por una variable $x \in \{0, 1\}$ donde $x = 0$ significa que el botón no se presiona y $x = 1$ significa que sí se presiona. De esta manera podemos representar los botones por 36 variables, de manera que el estado final de cada bombillo depende de la paridad de las suma de las 11 variables que se encuentran sobre su respectiva fila y columna. Las simetrías del problema nos permiten reducir esto a 12 variables $\{a, b, \ldots, l\}$, de la siguiente manera:

a	b	c	d	e	f
b	g	h	i	j	e
c	h	k	l	i	d
d	i	l	k	h	c
e	j	i	h	g	b
f	e	d	c	b	a

Para encontrar los valores de estas 12 variables, podemos empezar analizando las entradas sobre las diagonales $A1$, $B2$, $C3$, $C4$, $B5$, $A6$:

- $A1$ no cambia: $2a + 2b + 2c + 2d + 2e + f$ es par $\iff f = 0$;
- $B2$ no cambia: $2b + 2e + 2g + 2h + 2i + j$ es par $\iff j = 0$;
- $C3$ no cambia: $2c + 2d + 2h + 2i + 2k + l$ es par $\iff l = 0$;
- $C4$ cambia: $2c + 2d + 2h + 2i + k + 2l$ es impar $\iff k = 1$;

- $B5$ no cambia: $2b + 2e + g + 2h + 2i + 2j$ es par $\iff g = 0$;
- $A6$ cambia: $a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f$ es impar $\iff a = 1$.

Por lo tanto, la solución es de la forma

1	b	c	d	e	0
b	0	h	i	0	e
c	h	1	0	i	d
d	i	0	1	h	c
e	0	i	h	0	b
0	e	d	c	b	1

Para determinar las variables restantes hacemos el análisis en las casillas $A2$, $A3$, $A4$, $A5$, $B3$ y $B4$:

- $A2$ cambia: $2b + c + d + e + h + i + 1$ es impar $\iff c + d + e + h + i$ es par;
- $A3$ no cambia: $b + 2c + d + e + h + i + 2$ es par $\iff b + d + e + h + i$ es par;
- $A4$ no cambia: $b + c + 2d + e + h + i + 2$ es par $\iff b + c + e + h + i$ es par;
- $A5$ cambia: $b + c + d + 2e + h + i + 1$ es impar $\iff b + c + d + h + i$ es par;
- $B3$ cambia: $b + c + d + e + 2h + i + 1$ es impar $\iff b + c + d + e + i$ es par;
- $B4$ cambia: $b + c + d + e + h + 2i + 1$ es impar $\iff b + c + d + e + h$ es par.

Restando cualesquiera dos de estas expresiones encontramos que la paridad de las 6 variables es la misma. Dado que la suma de cualesquiera cinco de estas es par, concluimos que todas deben ser iguales a 0. Concluimos que el valor de las variables es

1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1

Es decir, los botones que deben presionarse son $A6$, $C4$, $D3$ y $F1$.