XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 1 - NIVEL III
Jueves 10 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#1 Halle todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución: Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras. Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, se tiene que $11 \leq s \leq 21$. Si $n = xyzt$, se tiene: $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ y $x + y + z + t = s$ al restar queda: $999x + 99y + 9z = s^3 - s$ Observe que el segundo término debe ser múltiplo de 9, además, se tiene que $s^3 - s = s(s-1)(s+1)$ y por ser $11 \leq s \leq 21$ sólo hay tres valores para $s^3 - s$ que son múltiplos de 9, esto es: $16 \cdot 17 \cdot 18$; $17 \cdot 18 \cdot 19$ y $18 \cdot 19 \cdot 20$, al sustituir en $999x + 99y + 9z = s^3 - s$, se analiza cada caso:

- $999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ por lo que se obtiene que $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, al ponerlos en $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y por último $n = 4913$.

- $999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, al ponerlos en $1000x+100y+10z+t = s^3$ con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y por último $n = 5832$.

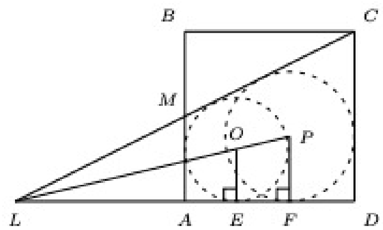
- $999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ de donde $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, al ponerlos en $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ con $s = 19$ se tiene una contradicción.

Por lo tanto, se tiene que las únicas soluciones son 4913 y 5832.

#2 Considere un cuadrado $ABCD$. Sea M el punto medio del segmento $\overline{AB}$, Γ_1 la circunferencia tangente a $\overline{AD}$, $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ con radio $r > 0$ y sea Γ_2 la circunferencia tangente a $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{MC}$ con radio $R > 0$. Pruebe que

$$R = \frac{2r}{r+1}$$

Solución: Sean O y P los centros de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Prolonguemos los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{MC}$ y $\overline{AD}$ y sea L el punto de intersección de $\overleftrightarrow{OP}$, $\overleftrightarrow{MC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. Si E y F son los puntos de tangencia de de Γ_1 y Γ_2 sobre $\overline{AD}$ entonces $\triangle LEO \sim \triangle LFP$.



De lo anterior

$$\frac{LE}{LF} = \frac{EO}{FP} \iff \frac{2+r}{4-R} = \frac{r}{R},$$

de donde se concluye que $R = \dfrac{2r}{r+1}$.

#3 Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Pruebe que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(x+z)(z+y)}} \leqslant 1.$$

Solución: Aplicando la desigualdad de la media aritmética-media geométrica tenemos que

$$\frac{x^2+yz}{2} \geqslant \sqrt{x^2yz} = x\sqrt{yz} \implies x^2+yz \geqslant 2x\sqrt{yz}.$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos lados y factorizando obtenemos que

$$\sqrt{(x+y)(x+z)} \geqslant \sqrt{xy} + \sqrt{xz}.$$

Con un razonamiento análogo llegamos a las desigualdades

$$\sqrt{(y+z)(y+x)} \geqslant \sqrt{yz} + \sqrt{xy}$$

y

$$\sqrt{(z+x)(z+y)} \geqslant \sqrt{xz} + \sqrt{yz},$$

por lo que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leqslant \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.$$

Análogamente

$$\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} \leqslant \frac{y}{y+\sqrt{yz}+\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

y

$$\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant \frac{z}{z+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.$$

Sumando las tres desigualdades obtenemos que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(x+z)(z+y)}}\leqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=1.$$

Esto concluye la prueba.