XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
FINAL NACIONAL
DÍA 2 - NIVEL III
Viernes 11 de diciembre de 2020
Tiempo disponible: 4 horas

#4 Considere la función h, definida para todos los números reales positivos, tal que:

$$10x - 6h(x) = 4h\left(\frac{2020}{x}\right)$$

para todo $x > 0$. Determine el criterio de h y el valor de $h(4)$.

Solución: Observe que al sustituir x por $\frac{2020}{x}$ en $10x - 6h(x) = 4h\left(\frac{2020}{x}\right)$, se obtiene:

$$10\left(\frac{2020}{x}\right) - 6h\left(\frac{2020}{x}\right) = 4h(x)$$

Como se tienen las siguientes igualdades:

$$10x - 6h(x) = 4h\left(\frac{2020}{x}\right)$$

y

$$10\left(\frac{2020}{x}\right) - 6h\left(\frac{2020}{x}\right) = 4h(x)$$

Si se multiplica la primera por 3 y la segunda por -2 y se suman,

$$\begin{array}{c} 30x - 18h(x) = 12h\left(\frac{2020}{x}\right) \\ + \\ -20\left(\frac{2020}{x}\right) + 12h\left(\frac{2020}{x}\right) = -8h(x) \end{array}$$

se obtiene:

$$30x - 18h(x) - 20\left(\frac{2020}{x}\right) + 12h\left(\frac{2020}{x}\right) = 12h\left(\frac{2020}{x}\right) - 8h(x)$$

que es equivalente a:

$$30x - 18h(x) - 20\left(\frac{2020}{x}\right) = -8h(x)$$
$$30x - \frac{20 \cdot 2020}{x} = -8h(x) + 18h(x)$$
$$30x - \frac{20 \cdot 2020}{x} = 10h(x)$$
$$h(x) = 3x - \frac{2 \cdot 2020}{x}$$
$$h(x) = 3x - \frac{4040}{x}$$

Por último se determina el valor de $h(4)$, esto es: $h(4) = 3(4) - \frac{4040}{4}$, por lo tanto $h(4) = -998$

#5 Determine el valor de la expresión

$$\alpha = (1 + \tan(1^\circ))(1 + \tan(2^\circ)) \cdot ... \cdot (1 + \tan(45^\circ)).$$

Solución: Primeramente note que si $k \in \mathbb{N}$ con $1^\circ \leqslant k^\circ \leqslant 45^\circ$ entonces

$$\begin{aligned}
(1+\tan(k^\circ))(1+\tan(45-k)^\circ) &= \left(1+\frac{\operatorname{sen}(k^\circ)}{\cos(k^\circ)}\right)\left(1+\frac{\operatorname{sen}(45-k)^\circ}{\cos(45-k)^\circ}\right) \\
&= \frac{\cos(k^\circ)+\operatorname{sen}(k^\circ)}{\cos(k^\circ)} \cdot \frac{\cos(45-k)^\circ+\operatorname{sen}(45-k)^\circ}{\cos(45-k)^\circ} \\
&= \frac{\cos(k^\circ)+\operatorname{sen}(k^\circ)}{\cos(k^\circ)} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(k^\circ)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(k^\circ)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(k^\circ)-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(k^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(k^\circ)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(k^\circ)} \\
&= \frac{\cos(k^\circ)+\operatorname{sen}(k^\circ)}{\cos(k^\circ)} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos(k^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(k^\circ)+\operatorname{sen}(k^\circ))} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Así

$$\alpha = (1+\tan(1^\circ))(1+\tan(44^\circ))(1+\tan(2^\circ))(1+\tan(43^\circ))\cdot\cdots\cdot(1+\tan(22^\circ))(1+\tan(23^\circ))(1+\tan(45^\circ)) = 2^{23}.$$

#6 Alrededor de una mesa circular se sientan 10 personas y sobre la mesa hay 22 floreros. Dos personas pueden verse si y sólo si no hay ningún florero alineado con ellas.

Pruebe que existen al menos dos personas que pueden verse.

Solución: Sean P_1, P_2,..., P_{10} los puntos (personas), con los subíndices tomados módulo 10. Si un florero está situado en la intersección de k segmentos P_iP_j se dice que cada segmento está bloqueado por $\frac{1}{k}$ de florero. El bloqueo de un segmento es la suma de las fracciones correspondientes a los floreros que estén sobre él.

Observe que la suma de los bloqueos de todos los segmentos es igual al número de floreros colocados sobre los segmentos.

Suponga, ahora, que todas las visuales P_iP_j están bloqueadas por los floreros, entonces es claro que el bloqueo de cada segmento P_iP_{i+1} es al menos 1.

El de cada segmento P_iP_{i+2} es al menos $\frac{1}{2}$, ya que un florero sobre P_iP_{i+2} puede bloquear a lo sumo un segmento adicional $P_{i+1}P_j$. De manera análoga el bloqueo de cada segmento P_iP_{i+3} es al menos $\frac{1}{3}$, el de cada segmento P_iP_{i+4} es al menos $\frac{1}{4}$ y el de cada segmento P_iP_{i+5} es al menos $\frac{1}{5}$ por lo tanto el bloqueo total es:

$$10 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{5} = 10 + 5 + \frac{10}{3} + \frac{5}{2} + 2 = 17 + \frac{35}{6} = 17 + 5 + \frac{5}{6} > 22$$

lo que se prueba que 22 floreros no son suficientes para bloquear todas las visuales.