35° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Prueba final
Final Nacional

Nivel I

(7°)

2023

1. Enunciados

1. Juan elige números enteros x, y, z, que deben cumplir la siguiente condición: cada uno de ellos debe ser mayor o igual a -25 y menor o igual a 15. Con los números que toma Juan realiza el siguiente cálculo:

$$x^8 + z^{15} - y^7$$

Juan quiere obtener el menor resultado posible del cálculo numérico anterior. Determine los valores de x, y, z que Juan debe tomar para lograr su objetivo y cual es ese menor resultado posible.

Solución: Para lograr el menor resultado posible es necesario que los términos que se están sumando sean lo menores posibles y los términos que se están restando sean lo más grandes posibles.

Para x^8 se desea que sea lo más pequeño posible, como es grado par no vamos a tener restados negativos, por lo que el menor valor que se puede alcanzar el es 0 y esto se alcanza cuando $x = 0$.

Para el término z^{15}, al ser una potencia impar si puede dar resultados negativos, por lo cual se deben tomar valores de z negativos para obtener el resultado menor. Esto se alcanza tomando el menor negativo posible, en este caso para $z = -25$.

Para $-y^7$ se busca que y^7 sea el valor grande posible para que $-y^7$ sea el menor posible. Como y^7 puede generar valores positivos o negativos, dependiendo de la base, debemos conseguir una base positiva. Así $y = 15$ es ese valor que buscamos.

Finalmente el menor resultado posible es

$$(0)^8 + (-25)^{15} - (15)^7$$

2. Determine todos los números de tres dígitos menores que 300 con exactamente 12 divisores positivos.

Solución: Sea $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ son enteros positivos. El número de divisores positivos de n es $d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1)$.

Se analizan todos los casos posibles para encontrar los números de tres dígitos menores que 300 con exactamente 12 divisores positivos :

a) Caso I: $n = p_1^{11}$, se obtiene $2^{11} = 2048$, que es un número mayor que 300, por lo que este caso se descarta.

b) Caso II: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$. Se presentan los siguientes subcasos:

1) $n = p_1^5 \cdot p_2^1$
   - Si $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$, se obtiene 96, que no es un número de tres cifras.
   - Si $p_1 = 2$ y $p_2 \in \{5, 7\}$ se obtienen 160 y 224. Por otro lado, si $p_2 > 7$ se obtienen números mayores que 300.
   - Si $p_1 = 3$ y $p_2 > 2$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 \geq 5$ se obtienen números mayores que 300.
2) $n = p_1^3 \cdot p_2^2$
   - Cuando $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$ se obtiene 72 que no tiene tres cifras. Si $p_1 = 2$ y $p_2 \in \{5, 7\}$ se obtiene 200 y 392. Por otro lado, si $p_2 > 7$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ se obtiene 108 Por otro lado, si $p_2 \geq 5$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 \geq 5$ y $p_2 \geq 2$ se obtienen números mayores que 300.

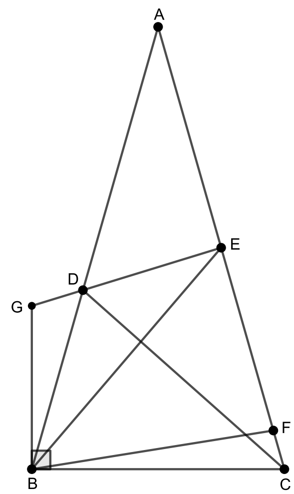
c) Caso III: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$. Se presentan los siguientes subcasos:

1) $n = p_1^2 \cdot p_2^1 \cdot p_3^1$.
   - Cuando $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ y $p_3 \in \{5, 7\}$ se obtiene 60 y 84, que no tienen tres cifras. Si $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ y $p_3 \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$ se obtienen los siguientes números: 60, 84, 132, 156, 204, 228, 276. Por otro lado, si $p_3 > 23$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 5$, se obtiene 90, que no es un número de tres cifras. Si $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ y $p_3 \in \{7, 11, 13\}$ se obtienen los siguientes números: $126, 198, 234$. Por otro lado, si $p_3 \geq 13$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 = 5$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 3$ se obtiene 150. Si $p_3 > 3$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 = 7, p_2 = 2$ y $p_3 = 3$ se obtiene 294. Por otro lado, si $p_3 > 3$ se obtienen números mayores que 300.
   - Cuando $p_1 \geq 11$ y $p_2, p_3 \geq 2$ se obtienen números mayores que 300.

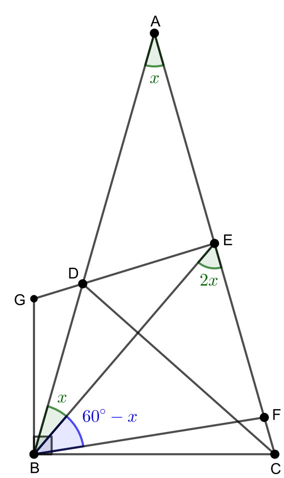
Por lo anterior, los números de tres dígitos menores que 300 con exactamente 12 divisores positivos son:

$$108, 126, 132, 150, 156, 160, 198,$$
$$200, 204, 224, 228, 234, 276, 294\,.$$

3. En la figura el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles cuyos lados congruentes son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Además, $GB \perp BC$, con $G - D - E$; $m\angle ABF = 60°$, $m\angle DCB = 50°$, $AE = EB$ y $EF = FB$. Demuestre que $GB = GE$.

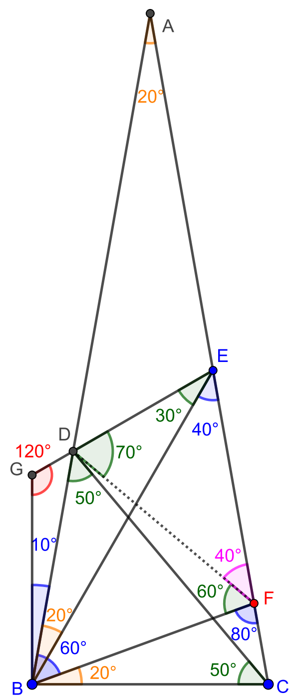


Solución: Sea $x = m\angle BAC$, como $AE = EB$ entonces el $\triangle AEB$ es isósceles y $m\angle BAE = m\angle ABE = x$ entonces por el teorema del ángulo externo $m\angle BEC = 2x$, por otra parte como $m\angle ABF = 60°$ entonces $m\angle EBF = 60° - x$. Pero como $EF = FB$, el $\triangle EFB$ es isósceles y entonces $2x = 60 - x$, con lo cual $x = 20°$.



Como el $\triangle ABC$ es isósceles y $m\angle BAC = 20°$ entonces $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$, lo que implica que $m\angle FBC = 20°$ y $m\angle BFC = 80°$ con lo cual $\triangle FBC$ es isósceles y $BC = BF$. Además como $m\angle DCB = 50°$ y $m\angle DBC = 80°$ entonces $m\angle BDC = 50°$ y el $\triangle DBC$ es isósceles y $DB = BC = BF$.

Como $m\angle DBF = 60°$ y $DB = BF$ el triángulo $\triangle DBF$ es equilátero. Eso implica que $DF = BF = EF$ por lo tanto $\triangle DEF$ es isósceles y la $m\angle DEF = 70°$, con lo que $m\angle GEB = 30°$. Pero como $GB \perp BC$ entonces $m\angle GBE = 30°$ y $\triangle GBE$ es isósceles, finalmente $GB = GE$.


A
20°
E
D
30°
40°
120°
70°
G
50°
10°
40°
F
60°
20°
80°
60°
50°
B
20°
C

4. En un juego recreativo de la XXXV final nacional de Olimpiadas, Pedro colocó cubitos de lado uno para formar un cubo más grande. Luego y pintó algunas de las caras del cubo grande que se formó con los cubitos pequeños. Después de que pintó esas caras, separó los cubitos pequeños y se dio cuenta de que 45 de ellos no tenían ninguna cara pintada. ¿Cuántas caras del cubo grande pintó Pedro?

   Solución:

   a) Si tenemos un cubo formado por $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos no podrán quedar 45 cubitos sin pintar.

   a) Si tenemos un cubo formado por $4 \times 4 \times 4 = 64$ y pinta una cara, tendrá $64 - 16 = 48$ cubitos sin pintar, es decir que no puede pintar otra cara y dejar 45 cubitos sin pintar, ya que si pinta una segunda cara que comparte una arista con la cara ya pintada, entonces tendrá 12 cubitos más pintados, y los no pintados serán $64 - 16 - 12 = 36$, mientras que si pinta dos caras paralelas tendrá $64 - 16 - 16 = 32$ cubitos sin pintar.

   b) Si tenemos un cubo formado por $5 \times 5 \times 5 = 125$ y se pinta la base y la tapa, se tiene sin pintar $125 - 50 = 75$ necesitamos pintar dos caras paralelas, con lo cual se tiene 30 cubitos más pintados, por lo tanto $125 - 50 - 30 = 45$. Se necesitan pintar 4 caras.

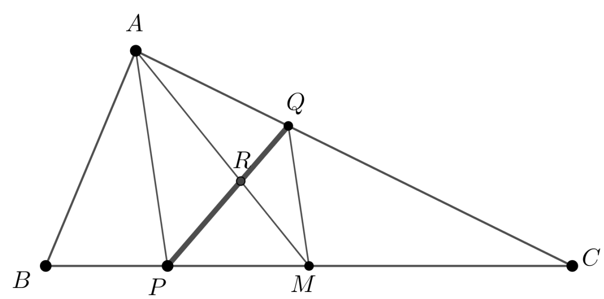
   c) Si tenemos un cubo formado por $6 \times 6 \times 6$ cubitos, el cubo que está en la parte interior del cubo mayor es un cubo de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubitos que no estarían pintados y el problema nos dice que únicamente 45 cubos pequeños no tienen caras pintadas. Por lo tanto, nuestro cubo grande estará formado por a lo más $5 \times 5 \times 5$.

5. Considere el triángulo $\triangle ABC$. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$, Q un punto de $\overline{AC}$ y P un punto de $\overline{BC}$ de tal forma que $\square APMQ$ es un trapecio. Demuestre que el área de $\square ABPQ$ es igual a la de $\triangle PQC$.

   Solución: Considere el punto medio del lado $\overline{BC}$, llamado M y trace el segmento $\overline{AM}$. Note que este segmento corresponde a una mediana del triángulo, por lo que el área del triángulo $(ABM) = (ACM)$.

   Ahora, considere el punto P en el segmento $\overline{BM}$, trace el segmento $\overline{PA}$ y construya una recta paralela a este de forma que interseque al segmento $\overline{AC}$. Llamaremos al punto de intersección Q.

   Luego, trace el segmento $\overline{AM}$ y el segmento $\overline{PQ}$. Llamaremos al punto de intersección de estos segmentos R.



   El segmento solicitado es $\overline{PQ}$, y divide al triángulo en dos áreas de igual medida, el área del cuadrilátero $\square BAQP$ y el área del triángulo $\triangle\ PQC$.

   Se tenía que

$$(ABM) = (AMC) \Rightarrow (ABPR) + (PRM) = (RQCM) + (ARQ)$$

   Además, note que

$$(ABPQ) = (ABPR) + (ARQ)$$
$$(PQC) = (MRQC) + (PRM)$$

   Por lo que para demostrar la igualdad de las áreas $(BAQP)$ y (PQC) basta con mostrar que el área (ARQ) es igual al área (PRM).

   Note que el triángulo $\triangle\ APQ$ y el triángulo $\triangle\ AMP$ tienen en común la base $\overline{AP}$, y también tiene una altura de igual medida, porque los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{QM}$ son paralelos entre sí, por lo que las áreas son de esos triángulos son iguales.

   Ahora, si al área de los triángulos $\triangle\ APQ$ y $\triangle\ AMP$ se le resta el área en común (APR), se obtiene que (AQR) y (PRM) son iguales y, por lo tanto las áreas $(BAQR)$ y (PQC) son iguales.

6. Encuentre todos los números de seis dígitos $M = abcdef$, con $a \neq 0$, tales que al mover el último dígito f a la primera posición se obtiene un número $N = fabcde$ que satisface

$$\frac{M}{N} = \frac{35}{23}.$$

Solución: Empezamos escribiendo el número de 5 dígitos $m = abcde$, de forma que $M = 10m+f$ y $N = 10^5 f + m$. La condición del problema nos da que

$$23(10m + f) = 35(10^5 f + m) \Longrightarrow 195m = (35 \cdot 10^5 - 23)f.$$

Como 5 divide al lado izquierdo y no divide a $35 \cdot 10^5 - 23$, entonces 5 divide a f. Esto implica que $f = 0$ o $f = 5$. Sin embargo, si $f = 0$ se obtiene que $m = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $f = 5$ y así concluimos que

$$m = \frac{(35 \cdot 10^5 - 23) \cdot 5}{195} = \frac{3499977}{3 \cdot 13} = \frac{1166659}{13} = 89743.$$

De esta forma concluimos que el único número de seis dígitos que cumple la condición del problema es 897435.