35° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Propuesta de Problemas con Solución
Final Nacional

Nivel II

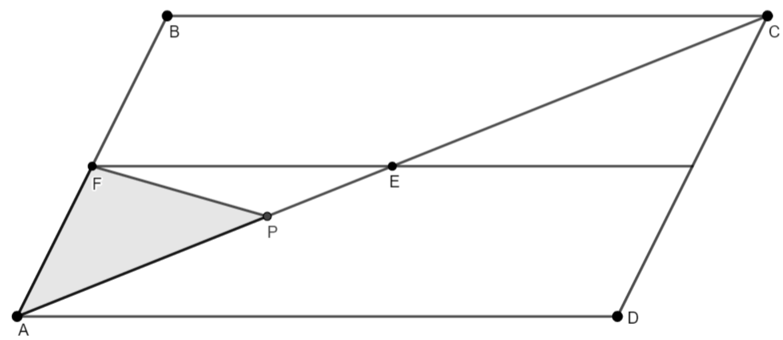
(8° y 9°)

2023

1. Primer día

1. Sea $ABCD$ un paralelogramo cuya área mide 144 cm^2. Sea E el punto medio de $\overline{AC}$, F un punto en $\overline{AB}$ tal que $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y P un punto en $\overline{AE}$ tal que $3PE = AE$. Determine el área del triángulo AFP.

   Solución: Considere la siguiente figura.

   En primera instancia, como $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y E es punto medio de $\overline{AC}$, entonces F debe ser punto medio de $\overline{BA}$.

   Por otro lado, considere la recta que contiene al segmento $\overline{EF}$ y la recta paralela a $\overline{FA}$ que pasa por E y que interseca al lado $\overline{AD}$ en H. Note que se divide el cuadrilátero en cuatro partes iguales, por lo que

$$(AFEH) = \frac{144}{4} = 36$$

   y como el segmento $\overline{AE}$ es una diagonal de $\square AFEH$, entonces

$$(AFE) = \frac{36}{2} = 18$$

   Por último, considere h la altura del $\triangle AFE$ sobre el lado $\overline{AE}$ desde el vértice F. Note que h es la altura para $\triangle AFP$ y también para $\triangle FPE$, entonces

$$\begin{aligned} & (AFP) + (FPE) = 18 \\ \Rightarrow\quad & \frac{AP \cdot h}{2} + \frac{PE \cdot h}{2} = 18 \\ \Rightarrow\quad & \frac{2PE \cdot h}{2} + \frac{PE \cdot h}{2} = 18 \\ \Rightarrow\quad & \frac{3PE \cdot h}{2} = 18 \\ \Rightarrow\quad & PE \cdot h = 12 \\ \Rightarrow\quad & \frac{AP}{2} \cdot h = 12 \\ \Rightarrow\quad & (AFP) = 12 \end{aligned}$$

2. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ y p un primo menor que 11. Considere que m y n son mayores que p, donde p no divide a m o no divide a n. Determine los valores de p tales que $m^2 + n^2$ no sea divisible por p.

   Solución:

   Sin pérdida de generalidades note que si p no divide a m entonces por el algoritmo de la división se tiene que existen $c \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ talque

   $$m = p \cdot c + r,$$

   de donde se tiene que

   $$m^2 = (p \cdot c)^2 + 2p \cdot c \cdot r + r^2.$$

   Exhaustivamente podemos considera uno a uno los valores $\{2, 3, 5, 7\}$. Si $p = 2$ entonces $r \in \{1\}$ de donde se tiene que el residuo de la suma de los cuadrados de m y n pertenecen al conjunto $\{1, 2\}$, en el caso que sea 2 no se tiene lo que se quiere. (Aquí también funciona un contraejemplo)

   Ahora, si $p = 3$ entonces $r \in \{1\}$ de donde se tiene que el residuo de la suma de los cuadrados de m y n pertenecen al conjunto $\{1, 2\}$, y en cualquier caso 3 no divide a $m^2 + n^2$.

   En el caso $p = 5$ entonces $r \in \{1, 4\}$ de donde se tiene que el residuo de la suma de los cuadrados de m y n pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$, en el caso que sea 5 no se tiene lo que se quiere.

   Ahora, si $p = 7$ entonces $r \in \{1, 2, 4\}$ de donde se tiene que el residuo de la suma de los cuadrados de m y n pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y en cualquier caso 7 no divide a $m^2 + n^2$.

   Entonces, se tiene que los valores de $p \in \{3, 7\}$.

3. Suponga que se quiere diseñar un torneo de fútbol de dos etapas con seis equipos tales que la primera etapa cumple las siguientes condiciones:

   - Hay dos equipos que disputan la misma cantidad de partidos.
   - Los otros cuatro equipos disputan distinta cantidad de partidos.
   - Existe la posibilidad de pasar a la siguiente etapa sin disputar ningún partido.

   ¿De cuántas formas se puede diseñar la primera etapa del torneo?

   Solución: Sean A y B los dos equipos que disputan la misma cantidad de partidos y sea v dicha cantidad. Además, sean x, y, z, y w la cantidad de partidos que disputan los otros equipos. Supongamos que $x > y > z > w$.

   En primer lugar se debe notar que $x + y + z + w$ es par. Además, si alguno de estos números es 0, entonces otro no puede ser 5. Consideremos los siguientes casos:

   - Si $v = 5$, entonces todos los demás equipos deberán disputar partidos con A y con B, de modo que $x, y, z, w \geq 2$ lo cual no es posible.
   - Si $v = 4$, se tiene que si $w = 0$, entonces los equipos que disputan x, y, z partidos deberán enfrentarse a A y a B, por lo que todos ellos serían mayores o iguales que 2, es decir 2, 3, 5, y eso no es posible pues 0 y 5 no pueden estar juntos. Por lo que debe darse que $x = 5$, $y = 3$, $z = 2$, $w = 1$, pero esto tampoco es posible pues no tiene suma par.
   - Si $v = 3$, entonces se tienen dos posibilidades:
     a) $x = 5$, $y = 4$, $z = 2$ y $w = 1$, este caso sí es posible y el número de formas está dado por $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$.
     b) $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$, $w = 0$, este caso no es posible pues no tiene suma par.
   - Si $v = 2$, entonces se tienen dos posibilidades:
     a) $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$ y $w = 1$, pero este caso es imposible pues no tiene suma par.
     b) $x = 4$, $y = 3$, $z = 1$, $w = 0$, este caso sí es posible y el número de formas está dado por $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$.
   - Si $v = 1$, entonces 5 y 4 no pueden aparecer juntos, así que debría darse que $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ y $w = 0$, pero la suma no es par y, por tanto, este caso es imposible.
   - Si $v = 0$, entonces ninguno de x, y, z, w puede ser 5 y 4, por lo que este caso es imposible.

   El número de formas en que se puede diseñar el torneo es de 1440.

2. Segundo día

4. Considere las siguientes tres sucesiones, con n un número natural mayor o igual a uno:

- $a_n = \dfrac{10^{3n+3} - 10^{2n+3}}{9}$
- $b_n = \dfrac{7(10^{2n+2} - 10^{n+1})}{9}$
- $c_1 = 111, c_2 = 1111, \ldots, c_n = \overbrace{1111\ldots11}^{n+2}$

Determine la suma de los dígitos de $s_n = a_n + b_n + c_n$.

Solución: Busquemos un patrón de como se comportan las sucesiones:

a) La sucesión a_n:

$$a_1 = \frac{10^6 - 10^5}{9} = \frac{10^5\,(10-1)}{9} = 10^5 = 100\,000$$

$$a_2 = \frac{10^9 - 10^7}{9} = \frac{10^7\,(100-1)}{9} = 10^7 \cdot \frac{99}{9} = 10^7 \cdot 11 = 110\,000\,000$$

$$a_n = \frac{10^{3n+3} - 10^{2n+3}}{9} = \frac{10^{2n+3}\,(10^n - 1)}{9} =$$

$$a_n = \frac{10^{2n+3}(\overbrace{999\ldots99}^{n})}{9} = 10^{2n+3}(\overbrace{111\ldots11}^{n}) = \overbrace{111\ldots11}^{n}\overbrace{000\ldots00}^{2n+3}$$

b) La sucesión b_n:

$$b_1 = 7 \cdot \frac{10^4 - 10^2}{9} = 7 \cdot \frac{10^2\,(100-1)}{9} = 7 \cdot 10^2(11) = 10^2 \cdot (77) = 7700$$

$$b_2 = 7 \cdot \frac{10^6 - 10^3}{9} = 7 \cdot \frac{10^3\,(1000-1)}{9} = 7 \cdot 10^3(111) = 10^3 \cdot (777) = 777000$$

$$b_n = 7 \cdot \frac{10^{2n+2} - 10^{n+1}}{9} = 7 \cdot \frac{10^{n+1}\left(10^{n+1} - 1\right)}{9} =$$

$$b_n = 7 \cdot \frac{10^{n+1}(\overbrace{999\ldots99}^{n+1})}{9} = 7 \cdot 10^{n+1}(\overbrace{111\ldots11}^{n+1}) = \overbrace{777\ldots77}^{n+1}\overbrace{000\ldots00}^{n+1}$$

c) Según lo anterior, la sucesión $c_n = \overbrace{1111\ldots11}^{n+2} = \dfrac{\overbrace{9999\ldots99}^{n+2}}{9} = \dfrac{10^{n+2} - 1}{9}$.

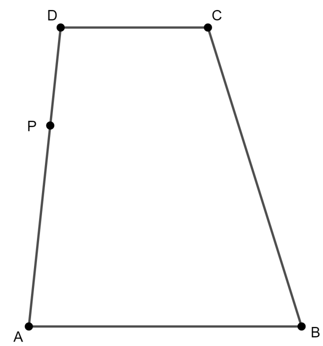
d) Ahora la suma de las tres sucesiones s_n

	Dígitos			
Sucesiones	n	1	$n+1$	$n+1$
$a_n =$	$11\ldots11$	0	$00\ldots000$	$00\ldots000$
$b_n =$			$77\ldots777$	$00\ldots000$
$c_n =$			1	$11\ldots111$
$s_n =$	$11\ldots11$	0	$77\ldots778$	$11\ldots111$

$s_n = \overbrace{11\cdots11}^{n}0\overbrace{77\ldots77}^{n}8\overbrace{11\ldots111}^{n+1}$.

Por lo tanto la suma de los dígitos de s_n es $n + 7n + 8 + n + 1 = 9n + 9$.

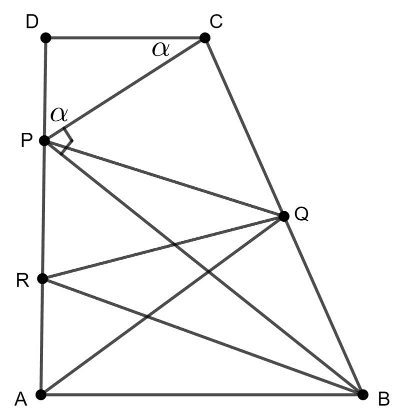
5. En la figura adjunta se muestra un trapecio $ABCD$ tal que $AB \parallel CD$, $AD = AB + CD$, P es un punto en AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.



Además, sea Q el punto medio de BC y R un punto tal que $A - R - P$, $\angle RAQ = \angle RBQ$ y $\angle QAB = \angle QRB$. Asuma que $\angle BPC = 90°$ y pruebe que $QB = QR$.

Solución:

Considere la siguiente figura:



Como $\triangle BPC$ es rectángulo y Q es el punto medio de la hipotenusa BC, entonces se cumple que $PQ = QB$.

Si llamamos α al ángulo DPC, entonces $\angle APB = 90° - \alpha$. Luego, como $AB = AP$, se tiene que $\angle ABP = 90° - \alpha$ y así $\angle PAB = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$.

Además, como $AB = AP$, entonces $\triangle APQ$ es congruente con $\triangle ABQ$, por lo que $\angle PAQ = \angle QAB = \alpha$.

Luego, como $\angle QAB = \angle QRB$, se tiene que $\angle QRB = \angle QBR$ y de este modo $\triangle QRB$ es isósceles con $QB = QR$.

6. Sea A un número real distinto de cero. Considere el polinomio p dado por

$$p(x) = x^4 + 2Ax^3 + 2A^2x^2 + 2A^3x + 5A^4$$

Determine el valor mínimo de $p(x)$.

Solución: Reescribiendo $p(x)$, para utilizar la primera fórmula notable se tiene que

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 2Ax^3 + A^2x^2 + A^2x^2 + 2A^3x + 5A^4 \\ &= x^4 + 2x^2Ax + A^2x^2 + A^2x^2 + 2AxA^2 + 5A^4 \\ &= \left[(x^2)^2 + 2(x^2)(Ax) + (Ax)^2\right] + \left[(Ax)^2 + 2(Ax)A^2 + (A^2)^2\right] + 4A^4 \\ &= \left(x^2 + Ax\right)^2 + \left(Ax + A^2\right)^2 + 4A^4 \\ &= \left(x^2 + Ax\right)^2 + \left(Ax + A^2\right)^2 + \left(2A^2\right)^2 . \end{aligned}$$

En consecuencia, $p(x)$ es una suma de cuadrados, y como cada cuadrado es mayor o igual que cero entonces se cumple que

$$p(x) = \left(x^2 + Ax\right)^2 + \left(Ax + A^2\right)^2 + \left(2A^2\right)^2 \geq 0 \, .$$

Por otro lado, el término $(2A^2)^2$ no depende de x, de modo que

$$p(x) = \left(x^2 + Ax\right)^2 + \left(Ax + A^2\right)^2 + \left(2A^2\right)^2 \geq \left(2A^2\right)^2 \, .$$

Finalmente, basta comprobar que este valor se alcanza. Para esto, las otras dos expresiones que dependen de x deben ser iguales a cero, pero el cuadrado de un número es igual a cero si y solo si el número es igual cero. Esto es

$$\begin{cases} x^2 + Ax = 0 \\ Ax + A^2 = 0 \end{cases}$$

en cuyo caso la única solución es $x = -A$. Por lo tanto, el valor mínimo de $p(x)$ es $4A^4$.