35° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Final Nacional

35

Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2023

35° Olimpiada Costarricense de Matemáticas

Final Nacional

Día 1 - III Nivel

Lunes 27 de noviembre de 2023

Tiempo disponible: Tres horas

Problema 1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de enteros no negativos. Considere una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ y para todo entero $n \geq 1$ se cumple que

$$f(n+1)f(n-1) = nf(n)f(n-1) + (f(n))^2.$$

Determine el valor de $\dfrac{f(2023)}{f(2022)}$.

Problema 2. Encuentre todos los pares ordenados de enteros positivos (r, s) para los que haya exactamente 35 pares ordenados de enteros positivos (a, b) tales que el mínimo múltiplo común de a y b sea $2^r \cdot 3^s$.

Problema 3. Sea $ABCD \ldots KLMN$ un polígono regular de 14 lados. Demuestre que las diagonales AE, BG y CK concurren.

35° Olimpiada Costarricense de Matemáticas
Final Nacional
Día 2 - III Nivel
Martes 28 de noviembre de 2023
Tiempo disponible: Tres horas

Problema 4. Un profesor quiere que sus N estudiantes se conozcan, por lo que realiza diversos clubes de tres personas, de forma que cada estudiante puede participar en varios clubes. Los clubes son formados de manera que si A y B son dos personas, entonces existe un único club tal que A y B sean dos de sus tres integrantes.

1. Demuestre que no hay manera que el profesor forme los clubes si $N = 11$.
2. Muestre que el profesor sí puede hacerlo si $N = 9$.

Problema 5. Sea t un número real positivo tal que $t^4 + t^{-4} = 2023$. Exprese el valor de $t^3 + t^{-3}$ en la forma $a\sqrt{b}$, donde a y b son enteros positivos.

Problema 6. Dado un entero positivo N, defina $u(N)$ como el número que se obtiene al mover el último dígito (el de las unidades) como primer dígito; por ejemplo, $u(2023) = 3202$.

1. Encuentre un entero positivo N de 6 dígitos tal que
$$\frac{u(N)}{N} = \frac{23}{35}.$$
2. Demuestre que no existe ningún entero positivo N con menos de 6 dígitos tal que
$$\frac{u(N)}{N} = \frac{23}{35}.$$

Problema 1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de enteros no negativos. Considere una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ y para todo entero $n \geq 1$ se cumple que

$$f(n+1)f(n-1) = nf(n)f(n-1) + (f(n))^2.$$

Determine el valor de $\dfrac{f(2023)}{f(2022)}$.

Solución. Al dividir la ecuación por $f(n-1)f(n)$ obtenemos que

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = n + \frac{f(n)}{f(n-1)}.$$

Si $g(n) = f(n+1)/f(n)$, entonces la relación anterior implica que $g(n) = n + g(n-1)$. Aplicando repetidas veces la igualdad anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} g(2022) &= 2022 + g(2021) \\ &= (2022 + 2021) + g(2020) \\ &= (2022 + 2021 + 2020) + g(2019) \\ &= \cdots \\ &= (2022 + 2021 + \cdots + 1) + g(0) = \frac{2022 \cdot 2023}{2} + 1 = 1011 \cdot 2023 + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(2023)/f(2022) = g(2022) = 1011 \cdot 2023 + 1 = 2045254$.

Problema 2. Encuentre todos los pares ordenados de enteros positivos (r, s) para los que haya exactamente 35 pares ordenados de enteros positivos (a, b) tales que el mínimo múltiplo común de a y b sea $2^r \cdot 3^s$.

Solución. Empezamos encontrando la cantidad de pares ordenados de enteros positivos (a, b) para los que su mínimo múltiplo común es $2^r \cdot 3^s$. Tenemos que a, b son divisores de $2^r \cdot 3^s$, por lo que $a = 2^j \cdot 3^k$ y $b = 2^m \cdot 3^n$ para ciertos j, k, m, n. Dado que $2^r \cdot 3^s$ es el mínimo múltiplo común, entonces debemos tener que $\max\{j, m\} = r$ y $\max\{k, n\} = s$. Por lo tanto, los posibles pares ordenados (j, m) son

$$\{(0, r), (1, r), \ldots, (r-1, r), (r, r), (r, r-1), \ldots, (r, 1), (r, 0)\},$$

lo cual da un total de $2r + 1$ posibles parejas. De la misma manera, los posibles pares ordenados (k, n) son

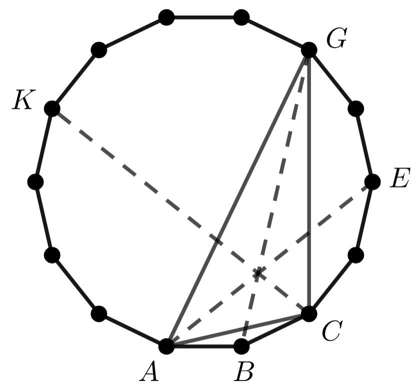
$$\{(0, s), (1, s), \ldots, (s-1, s), (s, s), (s, s-1), \ldots, (s, 1), (s, 0)\},$$

lo cual da un total de $2s+1$ posibles parejas. Con esto concluimos que el total de pares ordenados (a, b) que cumplen las condiciones del problema son $(2r + 1)(2s + 1)$.

Finalmente, como $(2r + 1)(2s + 1) = 35 = 5 \cdot 7$ y $r, s > 0$, entonces que $\{2r + 1, 2s + 1\} = \{5, 7\}$, lo que implica $\{r, s\} = \{2, 3\}$. Esto nos da dos pares ordenados para (r, s): $(2, 3)$ y $(3, 2)$.

Problema 3. Sea $ABCD\ldots KLMN$ un polígono regular de 14 lados. Demuestre que las diagonales AE, BG y CK concurren.

Solución. Como el polígono es regular, entonces existe un círculo que pasa por todos los puntos. Usaremos este hecho para calcular algunos ángulos en el dibujo; más precisamente, usaremos que si Y y Z son vértices vecinos, entonces para cualquier otro vértice X se cumple que $\angle YXZ = \pi/14 = \alpha$.



Consideramos el triángulo ACG y observamos que $\angle CAE = \angle GAE = 2\alpha$. De igual forma, notamos que $\angle ACK = \angle GCK = 4\alpha$ y $\angle AGB = \angle CGB = \alpha$. Esto implica que AE, GB y CK son las bisectrices del triángulo ACG y por lo tanto son concurrentes.

Problema 4. Un profesor quiere que sus N estudiantes se conozcan, por lo que realiza diversos clubes de tres personas, de forma que cada estudiante puede participar en varios clubes. Los clubes son formados de manera que si A y B son dos personas, entonces existe un único club tal que A y B sean dos de sus tres integrantes.

1. Demuestre que no hay manera que el profesor forme los clubes si $N = 11$.

2. Muestre que el profesor sí puede hacerlo si $N = 9$.

Solución. Observamos que si $N = 11$, entonces hay $(11 \cdot 10)/2 = 55$ parejas de estudiantes. Dado que hay tres parejas por club, deducimos que si fuera posible formar los clubes, entonces el número de parejas sería un múltiplo de 3. Como 55 no es divisible por 3, concluimos que no es posible formar los clubes.

Ahora si hay $N = 9$ estudiantes, los podemos enumerar de 1 a 9, y realizar los clubes de la forma: $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{1,8,9\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,9\}$, $\{2,7,8\}$, $\{3,4,8\}$, $\{3,5,7\}$, $\{3,6,9\}$, $\{4,7,9\}$ y $\{5,6,8\}$.

Comentario: Encontrar el ejemplo no es sencillo, este es único bajo permutaciones y se puede obtener razonando como al completar un Sudoku:. Cada número debe estar en 4 clubes, así que podemos suponer que los clubes que tienen al 1 son $\{1,2,3\}$,$\{1,4,5\}$,$\{1,6,7\}$,$\{1,8,9\}$.

Luego el 2 y el 3 no pueden volver a estar juntos, y el 4 debe estar en un club con estos. Por simetría podemos suponer que tenemos el club $\{2,4,6\}$. Si $\{3,4,x\}$ es un club, entonces x no puede ser 7, pues en caso contrario el club restante del 4 sería $\{4,8,9\}$, que repitiría la pareja 8 y 9. Por lo tanto, x es 8 o 9; podemos suponer que x es 8. De esta forma, los dos nuevos clubes del 4 son $\{3,4,8\}$ y $\{4,7,9\}$. Consideramos ahora los clubes $\{2,7,x\}$ y $\{3,7,y\}$ donde $\{x,y\}=\{5,8\}$. Para no repetir la pareja 3 y 8, entonces $x=8$ y $y=5$, con lo que obtenemos los clubes $\{2,7,8\}$ y $\{3,5,7\}$. De esta forma, 2 y 3 solo pueden estar en un club más, $\{2,5,9\}$ y $\{3,6,9\}$, quedando por último el club $\{5,6,8\}$.

Problema 5. Sea t un número real positivo tal que $t^4+t^{-4}=2023$. Exprese el valor de t^3+t^{-3} en la forma $a\sqrt{b}$, donde a y b son enteros positivos.

Solución 1. Empezamos observando que

$$(t^2+t^{-2})^2=t^4+2+t^{-4}=2023+2=2025=45^2,$$

por lo que $t^2+t^{-2}=45$. De la misma manera,

$$(t+t^{-1})^2=t^2+2+t^{-2}=45+2=47,$$

por lo que $t+t^{-1}=\sqrt{47}$. Adicionalmente, podemos ver que

$$(t+t^{-1})^3=t^3+3t+3t^{-1}+t^{-3}=(t^3+t^{-3})+3(t+t^{-1}),$$

con lo cual concluimos que

$$t^3+t^{-3}=(\sqrt{47})^3-3\sqrt{47}=44\sqrt{47}.$$

Solución 2. Sea $s=t+t^{-1}>0$. Tenemos que

$$s^2=t^2+2+t^{-2},\qquad s^3=t^3+3t+3t^{-1}+t^{-3},\qquad s^4=t^4+4t^2+6+4t^{-2}+t^{-4},$$

lo cual implica que

$$t^2+t^{-2}=s^2-2,\qquad t^3+t^{-3}=s^3-3s,$$
$$t^4+t^{-4}=s^4-4(t^2+t^{-2})-6=s^4-4(s^2-2)-6=s^4-4s^2+2.$$

Por lo tanto, deducimos que

$$s^4-4s^2+2=2023\iff s^4-4s^2-2021=0\iff(s^2-47)(s^2+43)=0.$$

Como $s^2\geq 0$, lo anterior implica que $s^2=47$, con lo cual $s=\sqrt{47}$. Con esto concluimos que

$$t^3+t^{-3}=(\sqrt{47})^3-3\sqrt{47}=44\sqrt{47}.$$

Solución 3. De la ecuación original obtenemos que $t^8 - 2023t^4 + 1 = 0$, con lo cual

$$t^4 = \frac{2023 \pm \sqrt{2023^2 - 4}}{2} = \frac{2023 \pm \sqrt{2021 \cdot 2025}}{2}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por 2 obtenemos que

$$t^4 = \frac{4046 \pm 2\sqrt{2025 \cdot 2021}}{4} = \frac{2025 \pm 2\sqrt{2025 \cdot 2021} + 2021}{4} = \left(\frac{\sqrt{2025} \pm \sqrt{2021}}{2}\right)^2.$$

Esto implica que

$$t^2 = \frac{\sqrt{2025} \pm \sqrt{2021}}{2} = \frac{45 \pm \sqrt{2021}}{2}.$$

Factorizamos $2021 = 47 \cdot 43$ y multiplicando el numerador y el denominador por 2 obtenemos que

$$t^2 = \frac{45 \pm \sqrt{2021}}{2} = \frac{90 \pm \sqrt{47 \cdot 43}}{4} = \frac{47 \pm 2\sqrt{47 \cdot 43} + 43}{4} = \left(\frac{\sqrt{47} \pm \sqrt{43}}{2}\right)^2,$$

por lo que

$$t = \frac{\sqrt{47} \pm \sqrt{43}}{2}.$$

Con esto deducimos que

$$t^{-1} = \frac{2}{\sqrt{47} \pm \sqrt{43}} = \frac{\sqrt{47} \mp \sqrt{43}}{2}.$$

Con esto concluimos que

$$t^3 + t^{-3} = \frac{1}{8}((a+b)^3 + (a-b)^3) = \frac{1}{8}(2a^3 + 6ab^2) = \frac{1}{4}a(a^2 + 3b^2) = \frac{1}{4}(47 + 3 \cdot 43)\sqrt{47} = 44\sqrt{47}.$$

Problema 6.

Dado un entero positivo N, defina $u(N)$ como el número que se obtiene al mover el último dígito (el de las unidades) como primer dígito; por ejemplo, $u(2023) = 3202$.

1. Encuentre un entero positivo N de 6 dígitos tal que

$$\frac{u(N)}{N} = \frac{23}{35}.$$

2. Demuestre que no existe ningún entero positivo N con menos de 6 dígitos tal que

$$\frac{u(N)}{N} = \frac{23}{35}.$$

Solución. Suponga que N tiene n dígitos. Sea $N = \overline{pq} = 10p + q$, donde p denota los primeros $n-1$ dígitos y q es el último dígito, de forma que $u(N) = \overline{qp} = 10^{n-1}q + p$. De esta manera obtenemos que

$$\frac{u(N)}{N} = \frac{23}{35} \iff 35(10^{n-1}q + p) = 23(10p + q) \iff (35 \cdot 10^{n-1} - 23)q = 195p.$$

Podemos factorizar $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Como 5 divide al lado izquierdo y no divide a $35 \cdot 10^n - 23$, entonces 5 divide a q, por lo que $q \in \{0, 5\}$. Sin embargo, si $q = 0$, entonces $p = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $q = 5$ y así obtenemos que

$$p = \frac{35 \cdot 10^{n-1} - 23}{3 \cdot 13}.$$

Note que si $n = 6$, entonces

$$p = \frac{3499977}{3 \cdot 13} = \frac{1166659}{13} = 89743,$$

el cual tiene en efecto 5 dígitos. Es decir, $N = 897435$ es el único número de 6 dígitos que cumple la relación $u(N)/N = 23/35$.

Finalmente, vamos a demostrar que no existe un número que cumpla $u(N)/N = 23/35$ y que tenga menos de 6 dígitos. Si esto sucediera, entonces $35 \cdot 10^{n-1} - 23$ sería divisible por 13. Considerando los residuos al dividirse entre 13, obtenemos que $35 \cdot 10^{n-1} - 23$ es divisible entre 13 si y solo si $-4 \cdot 10^{n-1} + 3$ es divisible entre 13. Al multiplicar por 3 esta última expresión obtenemos que esto es equivalente a que $10^{n-1} + 9$ sea divisible por 13, o bien que $10^{n-1} - 4$ sea divisible por 13. Podemos calcular los residuos de las potencias de 10 al dividirse por 13:

$$10^{1-1} \equiv 1, \quad 10^{2-1} \equiv -3, \quad 10^{3-1} \equiv -4, \quad 10^{4-1} \equiv -1, \quad 10^{5-1} \equiv 3.$$

Por lo tanto, vemos que no existe $1 \leq n \leq 5$ tal que 13 divida a $10^{n-1} - 4$, lo cual implica que no existe tal n de forma que 13 divida a $35 \cdot 10^{n-1} - 23$, que era lo que queríamos probar.