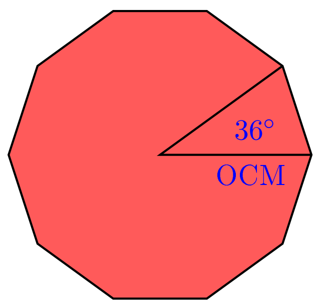
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Enunciados de las preguntas
I Eliminatoria Nacional



Nivel I

(7°)

2024

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2024 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la I Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

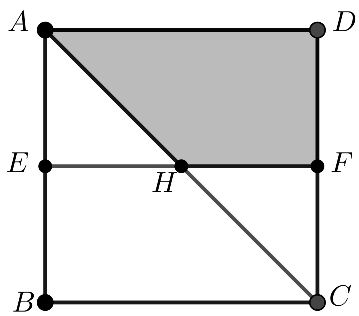
INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. En la siguiente figura, el cuadrilátero $\square ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 12 unidades.



Si $AE = EB$ y $m\angle BEF = 90°$, determine el área de la región sombreada.

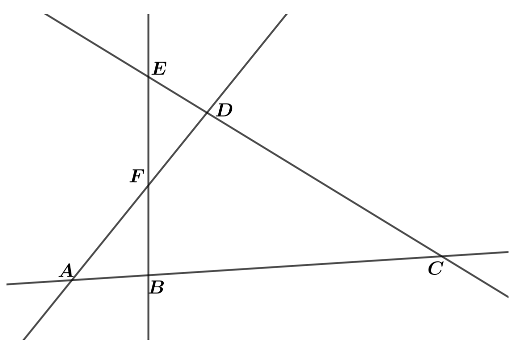
(a) $A = 36$

(b) $A = 42$

(c) $A = 54$

(d) $A = 18$

2. En la figura adjunta, m$\angle DCB = 42°$, m$\angle BED = 38°$ y m$\angle FAB = 60°$.



Entonces la medida del ángulo BFD es

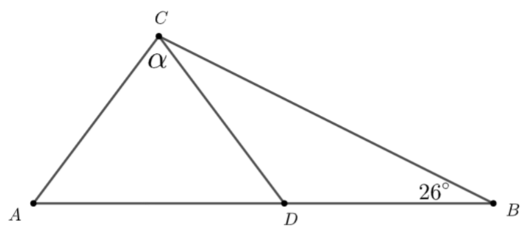
(a) 140°

(b) 100°

(c) 150°

(d) 120°

3. Considere la siguiente figura:



Si $AC = CD$, $CD = BD$, entonces la medida del ángulo α es

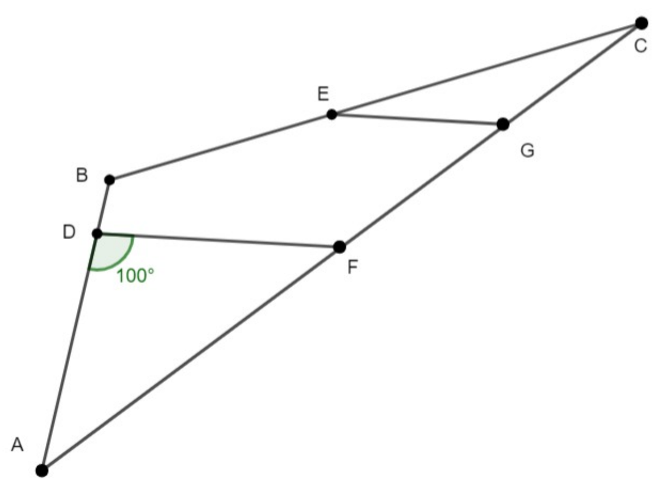
(a) $26°$

(b) $53°$

(c) $76°$

(d) $128°$

4. Considere la siguiente figura:



En el $\triangle ABC$ se tiene que $\overline{DF} \parallel \overline{GE}$ y $AD = DF$, además $\triangle EGC$ es isósceles. Si el ángulo $\angle ADF$ mide $100°$, entonces la medida del ángulo $\angle CEG$ es

(a) $20°$

(b) $30°$

(c) $60°$

(d) $80°$

5. Luis, Sara y Melissa conducen cada uno un autobús con diferentes rutas que tienen una parada en común. La ruta de Luis pasa cada 30 minutos por esa parada, la ruta de Sara pasa cada 36 minutos y la ruta de Melissa pasa cada 12 minutos. ¿Cuántas veces al día coinciden los tres autobuses en esa parada si los tres trabajan 12 horas diarias y empiezan a trabajar a la misma hora en esa misma parada?

   (a) 4

   (b) 12

   (c) 60

   (d) 180

6. El número N es el menor número positivo, de tres dígitos, que al sumarle 7 unidades el resultado es divisible por $10, 15$ y 33. La suma de los dígitos de N corresponde a:

   (a) 7

   (b) 8

   (c) 13

   (d) 20

7. Al efectuar el producto de todos los números impares comprendidos entre el 500 y 2024, ¿cuál es la cifra de las unidades del número resultante?

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 3

   (d) 5

8. Considere la siguiente secuencia:

   $$B4C14CB14B4C14CB14B4C14CB14B4C14C\ldots$$

   Según la información anterior, el número o la letra que se encuentra en la posición 2024 corresponde a

   (a) 1

   (b) 4

   (c) B

   (d) C

9. Sabiendo que

   $$\begin{array}{rcl} 95^2 & = & 9025 \\ 995^2 & = & 990025 \\ 9995^2 & = & 99900025 \end{array}$$

   ¿cuál es la suma de los dígitos del número $(\underbrace{999\ldots995}_{\text{40 cifras}})^2$?

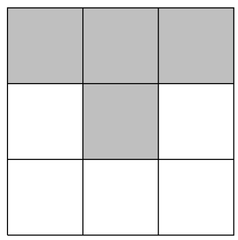
   (a) 328

   (b) 344

   (c) 352

   (d) 358

10. Diana quiere escribir los números del 1 al 9 en los cuadrados del tablero que aparece abajo, de forma tal que la suma de dos números en cuadrados vecinos (con un lado en común) sea un número impar, y que además la suma en los cuadrados grises sea la mayor posible. Entonces la suma de los números en los cuadrados blancos es igual a



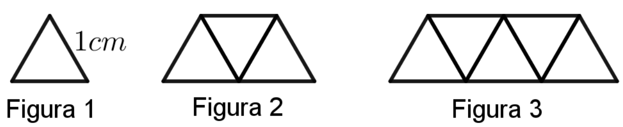
   (a) 15.

   (b) 16.

   (c) 17.

   (d) 18.

11. Con palillos de un 1 cm de longitud se construyen figuras como las que se presentan a continuación, siguiendo el patrón. ¿Cuántos palillos se usarán para construir la figura 2024?



   (a) 8091

   (b) 8092

   (c) 8095

   (d) 8099

12. En un salón hay ocho estudiantes resolviendo problemas de olimpiadas de matemática. Con certeza se puede asegurar que al menos dos estudiantes nacieron

   (a) el mismo día.

   (b) la misma semana.

   (c) el mismo mes.

   (d) el mismo bimestre.

13. En una academia de idiomas hay cursos de inglés y de portugués. Hay 29 personas que estudian inglés, 14 que estudian portugués y 8 que estudian ambos idiomas. Si se elige una de las personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona estudie únicamente uno de los dos idiomas?

    (a) $\frac{27}{35}$

    (b) $\frac{8}{15}$

    (c) $\frac{21}{29}$

    (d) $\frac{8}{14}$

14. Considere el $\triangle ABC$, donde $m\angle CAB + m\angle ABC = 110°$ y D es un punto de $\overline{AB}$ tal que $CD = CB$ y $m\angle DCA = 10°$. ¿Cuál es la medida de $\angle CAB$?

    (a) $60°$

    (b) $50°$

    (c) $40°$

    (d) $30°$

15. Sean k y r números enteros positivos. Si $(10k+4)(10k+r) = 2024$, entonces ¿cuál es el valor de r?

    (a) 2

    (b) 4

    (c) 6

    (d) 8

16. Suponga que se lanza un dado dos veces, considere las siguientes afirmaciones:

    I. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea un número primo es $\dfrac{15}{36}$.

    II. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea un número par es $\dfrac{21}{36}$.

    III. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea 1 es 0.

    Con certeza se puede afirma que:

    (a) Solamente la I es verdadera.

    (b) Solamente la II es verdadera.

    (c) Solamente la II y la III son verdaderas.

    (d) Solamente la I y la III son verdaderas.

17. Lucía necesita un código de tres dígitos para abrir su casillero. Sin embargo, para obtener el código le dan las siguientes pistas:

    I. El código 738 no tiene ningún dígito correcto.

    II. El código 985 tiene un dígito correcto, pero está en la posición equivocada.

    III. El código 257 tiene dos dígitos correctos, pero están en posiciones equivocadas.

    IV. El código 792 tiene un dígito correcto y está en el lugar correcto.

    V. El código 794 tiene un dígito correcto, pero está en la posición equivocada.

    Entonces

    (a) El código es 972.

    (b) El código es 532.

    (c) El código es 542.

    (d) Es imposible que Lucía obtenga el código con esas pistas.

18. Ana construye un cubo, usando 64 cubitos de un centímetro de arista. Después de pintar completamente tres caras de dicho cubo, separa los cubitos pequeños y nota que 8 de ellos tienen exactamente dos caras pintadas. ¿Cuántos cubitos de 1 cm de arista tienen exactamente una cara pintada?

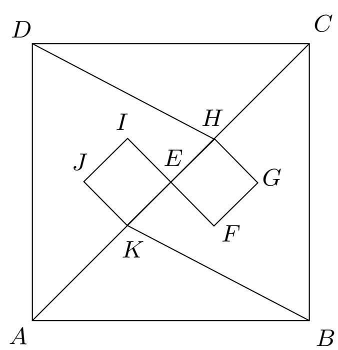
    (a) 18

    (b) 24

    (c) 27

    (d) 32

19. En la figura abajo, los cuadriláteros $\square ABCD$, $\square EFGH$, $\square EIJK$ son cuadrados. Además, $FG = \frac{AE}{3}$, $\overline{IF}$ está sobre la diagonal $\overline{DB}$ y los dos cuadrados pequeños tienen las mismas medidas.



Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si $FG = 1$ entonces $3 \cdot (AHD) = 18$.

II. Si $AE = 1$ entonces $2 \cdot (AHD) = 3$.

III. Si $FG = 1$ entonces $(AKB) = 3$.

Con certeza se puede afirmar que

(a) solamente la I y la II son verdaderas.

(b) solamente la I y la III son verdaderas.

(c) solamente la II y la III son verdaderas.

(d) solamente la I es verdadera.

20. Sean y el menor número con 15 divisores y x el menor número con 12 divisores. Considere la siguientes afirmaciones:

    I. $y - x$ es divisible por 8.

    II. Si z es el menor número con 13 divisores, entonces $x < z < y$.

    III. $12|x$ y $15|y$.

    Con certeza se puede afirmar que

    (a) solamente la I es verdadera.

    (b) solamente la II es verdadera.

    (c) solamente la II y la III son verdaderas.

    (d) todas las afirmaciones son falsas.