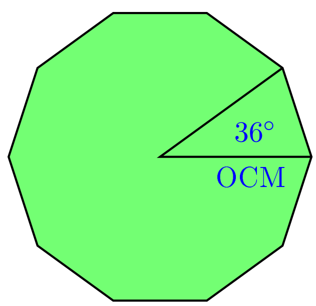
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

*MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT*

# Enunciados de las preguntas
# I Eliminatoria Nacional




Nivel II

(8° y 9°)

2024

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2024 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la I Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

**www.olcoma.ac.cr**

## INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

### SIMBOLOGÍA

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | segmento de extremos $A$ y$B$ | $\angle ABC \cong \angle DEF$ | congruencia de ángulos |
| $AB$ | medida de $\overline{AB}$ | $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ | congruencia de triángulos |
| $\overrightarrow{AB}$ | rayo de extremo $A$ y que contiene a $B$ | $ABC \leftrightarrow DEF$ | correspondencia de puntos |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | recta que contiene los puntos $A$ y $B$ | $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ | semejanza de triángulos |
| $\angle ABC$ | ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ | $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | congruencia de segmentos |
| $m\angle ABC$ | medida de $\angle ABC$ | $\widehat{AB}$ | arco de extremos $A$ y $B$ |
| $\triangle ABC$ | triángulo de vértices $A$, $B$, $C$ | $m\widehat{AB}$ | medida de $\widehat{AB}$ |
| $\square ABCD$ | cuadrilátero de vértices $A$, $B$, $C$, $D$ | $(ABC)$ | área de $\Delta ABC$ |
| $\parallel$ | paralelismo | $(ABCD)$ | área de $\square ABCD$ |
| $\perp$ | perpendicularidad | $P-Q-R$ | $P$, $Q$, $R$ puntos colineales, con $Q$ entre $P$ y $R$. |

1. Si $7a - b = 0$ y $5b - c = 0$, al simplificar la expresión $\dfrac{b-a}{c-b}$ se obtiene

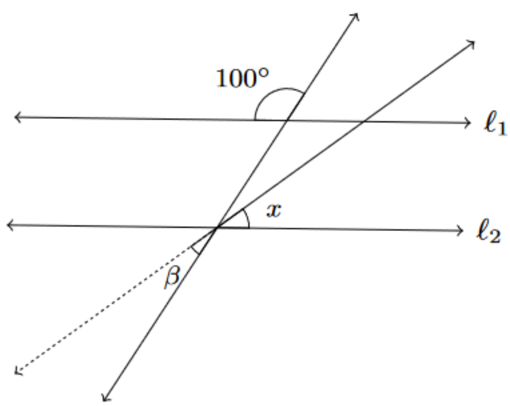
   (a) $\dfrac{3}{2}$

   (b) $\dfrac{3}{14}$

   (c) $\dfrac{6}{14}$

   (d) $\dfrac{3}{4}$

2. Considere la siguiente figura en la que $\ell_1 || \ell_2$:




   Si el ángulo $x$ mide $45°$, ¿cuál es la medida del ángulo $\beta$?

   (a) $30°$

   (b) $35°$

   (c) $70°$

   (d) $75°$

3. Considere el conjunto de los números enteros del 1 al 15. La menor cantidad de números que es suficiente escoger de esta lista, de forma que cualquier número del 1 al 15 se puede escribir como la suma de algunos de los números escogidos, sin repetición, o es uno de los números escogidos, es

   (a) 4.

   (b) 5.

   (c) 6.

   (d) 7.

4. Si $a \in \mathbb{N}$, considere el número $x = a^{2023} + a^{2024}$ y analice las siguientes proposiciones:

   I. Si $a$ es impar, entonces $x$ es impar.

   II. $x$ es par independientemente del valor de $a$.

   ¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas?

   (a) Únicamente la I.

   (b) Únicamente la II.

   (c) Ambas.

   (d) Ninguna.

5. Sea $abcd$ un número de 4 dígitos con $a \neq 0$ que satisface que al dividirlo entre 12, el residuo es 8 y el cociente es un número de dos dígitos $xy$ donde $y = 1$, y $x \neq 0$. Entonces, se puede asegurar que el valor de $a + b + c + d$ es:

   (a) 2

   (b) 4

   (c) 11

   (d) 13

6. Sea $p$ un número primo tal que $p+15$ también es un número primo. Entonces el número de divisores positivos de $p+16$ es igual a

   (a) 3

   (b) 6

   (c) 12

   (d) 18

7. El número real positivo $x$ satisface la ecuación

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{x}}}}}}=3.$$

   Entonces se puede asegurar que:

   (a) $x+1$ no es un número entero.

   (b) $x+1$ es entero divisible por 3.

   (c) $x+1$ es entero divisible por 5.

   (d) $x+1$ es entero divisible por 7.

8. Si $2a-2b=64$, con $a,b\in\mathbb{Z}$, entonces el valor numérico de $(a+b)^2-4ab$ corresponde a:

   (a) 32

   (b) 64

   (c) 1024

   (d) 4096

9. Si $m$ y $n$ son dos números reales diferentes, entonces ¿cuál de las siguientes relaciones sucede con certeza?

   (a) $m-n>0$

   (b) $m^2+n^2>2mn$

   (c) $-2(m+n)<0$

   (d) $m-2n^2>m^2$

10. Sean $x$ y $y$ números reales tales que $x + 3y = 3(x - y)$. Entonces el valor numérico de la expresión $\dfrac{3x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{xy^3}$ es

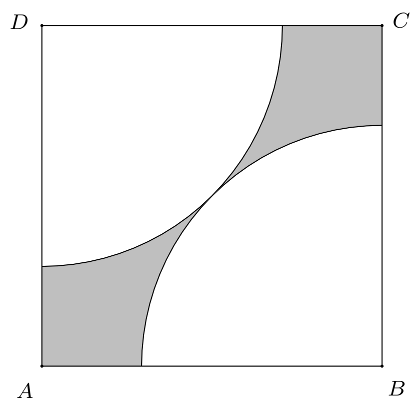
    (a) $\dfrac{2}{9}$

    (b) $\dfrac{22}{9}$

    (c) $\dfrac{226}{3}$

    (d) $\dfrac{76}{3}$

11. En la figura se muestra un cuadrado $\square ABCD$ de 6 cm de lado y dos circunferencias con centros en los puntos $B$ y $D$ respectivamente. Además, el radio de ambas es $\dfrac{AC}{2}$.




¿Cuál es, el área de la región sombreada?

    (a) $36 - 9\pi$ cm$^2$

    (b) $36 - 18\pi$ cm$^2$

    (c) $18\pi$ cm$^2$

    (d) $36 - \frac{9\pi}{2}$ cm$^2$

12. Sea $S$ el conjunto de los cuadrados perfectos entre 201 y 1000. ¿Cuál es la probabilidad de extraer de $S$ un número tal que la suma de sus dígitos sea un número primo?

    (a) $\dfrac{4}{17}$

    (b) $\dfrac{7}{17}$

    (c) $\dfrac{6}{17}$

    (d) $\dfrac{8}{19}$

13. Angie realizó una campaña de reforestación con sus amigos. Se reforestaron 5 hectáreas de terreno con árboles de manzana, higuerón y cedro rojo. Por cada 5 árboles de manzana se plantaron 2 de cedro rojo y por cada árbol de higuerón se plantaron 10 de manzana. Si se plantaron 2025 árboles durante la campaña, entonces la cantidad de cedros rojos sembrados corresponde a:

    (a) 135

    (b) 310

    (c) 540

    (d) 1350

14. Si sumamos todos los números positivos pares múltiplos de tres menores que 405 el resultado será un número cuya cifra de las unidades corresponde a

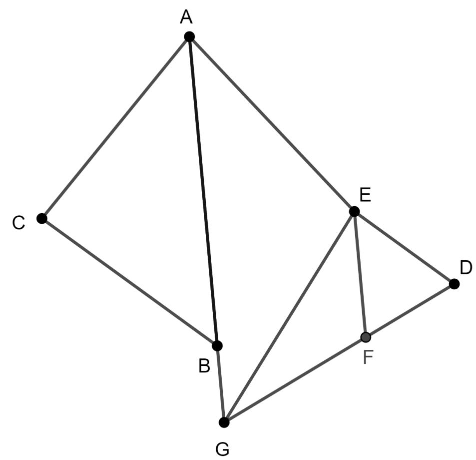
    (a) 2

    (b) 4

    (c) 6

    (d) 8

15. En la figura adjunta, $AC = BC$, $AE = GE$, $\overline{AG} \parallel \overline{EF}$, $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.




Con certeza se puede concluir que

(a) $\angle CAB \cong \angle GEF$

(b) $\angle ACB \cong \angle AEG$

(c) $\angle CAE \cong \angle GED$

(d) $\angle GAE \cong \angle FED$

16. Los números desde el 1 hasta el 2024 se escriben consecutivamente en una lista. En una primer proceso se borran el primer número escrito, el tercero, el quinto y así sucesivamente hasta completar la lista. En un segundo proceso se aplica el mismo procedimiento a los números que quedaron anteriormente, borrando el primero de ellos, el tercero, el quinto y así sucesivamente. Este proceso se repite mientras queden números de la lista.¿Cuántos números quedan en el momento en que se elimina el número 2024?

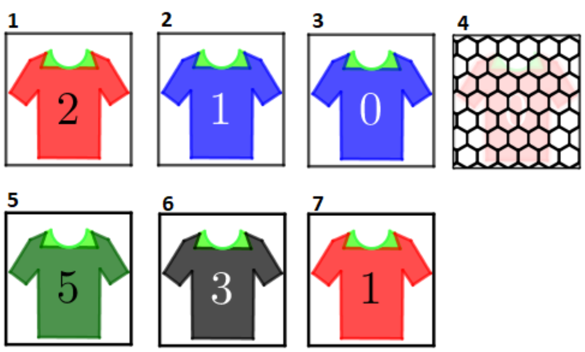
(a) 2024

(b) 1012

(c) 650

(d) 126

17. Un equipo femenino de fútbol compra 4 uniformes, de diferente color, numerados del 0 al 10. La entrenadora toma al azar 8 camisas y le pide a la portera que escoja la camisa que quiere estrenar en el próximo partido. La portera coloca las camisas ofrecidas una sobre otra dejando encima la que ella seleccionó. La asistente debe mandar a lavar las camisas, por lo que coloca el resto de ellas, una sobre otra sin ningún orden sobre la camisa seleccionada por la portera, seguidamente las empaca de la siguiente manera: las apila una a una, iniciando con la que esta en la parte superior y cuenta del 7 al 0 en forma regresiva $(7-6-5-4-3-2-1-0)$. Si el número de la camisa coincide con el número que ella dijo se detiene y las empaca en una bolsa transparente, si llega al 0 sin coincidir se detiene y las empaca en una bolsa opaca (no se ve muy bien el contenido), continua de la siguiente manera y al final se puede observar:




Note que en la primera bolsa se detuvo en la camisa 2 Roja, luego en la 1 Azul, después en 0 Azul, en la cuarta bolsa no hubo coincidencia, en la quinta se detuvo en 5 Verde, luego 3 Negra y finalmente 1 Roja. ¿Cuál camisa seleccionó la portera?

(a) 0 Azul

(b) 5 Verde

(c) 3 Negra

(d) 1 Roja

18. Se tienen 3 cajas, dos de ellas con bolitas de igual peso y forma pero de distintos colores y una tercera caja vacía. La caja 1 tiene exactamente 7 bolitas verdes y la caja 2 tiene exactamente 12 bolitas verdes. La probabilidad de sacar al azar una bolita verde es la misma tanto para la caja 1 como para la 2. Se juntan todas las bolitas de la caja 1 y la caja 2 en la caja 3 (que estaba vacía) y ahora la caja 3 tiene entre 270 y 300 bolitas de colores. La probabilidad de tomar una bolita verde al azar de la caja 3 corresponde a:

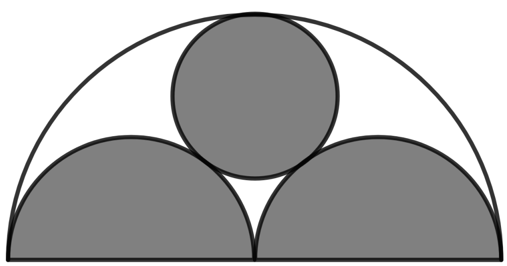
    (a) $\frac{1}{3}$

    (b) $\frac{1}{7}$

    (c) $\frac{1}{12}$

    (d) $\frac{1}{15}$

19. En la figura se muestra un semicírculo grande, dos semicírculos de radios iguales y un círculo tangente a los tres semicírculos.

    La proporción entre el área sombreada y el área del semicírculo grande es igual a

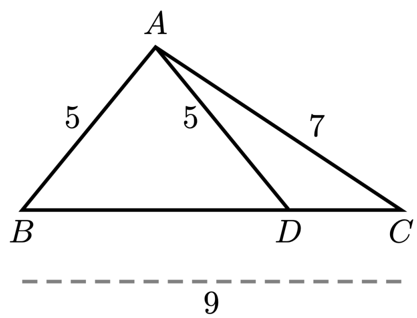
    (a) $\frac{2}{3}$

    (b) $\frac{3}{4}$

    (c) $\frac{13}{16}$

    (d) $\frac{13}{18}$

20. En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$.
Determine $\dfrac{BD}{DC}$.




(a) $\dfrac{5}{7}$

(b) $\dfrac{19}{6}$

(c) $\dfrac{5}{4}$

(d) $\dfrac{5}{9}$