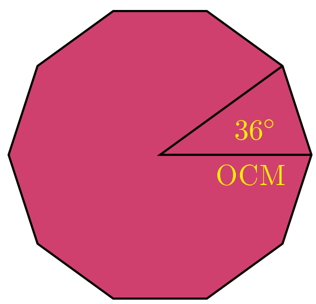
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Enunciados de las preguntas
I Eliminatoria Nacional



Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2024

Estimado estudiante:
La Comisión organizadora de la 36° Olimpiada Costarricense de Matemáticas le saluda y le da la más cordial bienvenida a la I Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. Sea k un número real tal que la ecuación

$$\frac{x+\sqrt{x-k}}{x-\sqrt{x-k}}=2$$

tiene solución única. Un intervalo que contiene a k corresponde a

   (a) $[0,1]$

   (b) $[2,3]$

   (c) $[4,5]$

   (d) $[6,7]$

2. Considere la ecuación $4n^2 = 323 \cdot 2^{m-1} + 1$, donde m y n son enteros positivos. La cantidad de pares ordenados de enteros positivos (m,n) que son solución de la ecuación corresponde a

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

3. Sea $n = abcde$, con a,b,c,d,e dígitos. Se sabe que n es número impar divisible por 3 y 5.
Considere las siguientes afirmaciones:

   I. Si $a = 4$ entonces el número bcd es par.

   II. Si $a = 4$ entonces el número bcd es divisible por 3.

   III. Si bcd es divisible por 3 entonces, $a = 4$.

   Con certeza se puede afirmar que:

   (a) Solamente la I es verdadera.

   (b) Solamente la II es verdadera.

   (c) Solamente la II y la III son verdaderas.

   (d) Todas las afirmaciones anteriores son verdaderas.

4. La cantidad de divisores positivos del número 999999 corresponde a:

   (a) 59

   (b) 64

   (c) 68

   (d) 72

5. Sea S el conjunto de los pares ordenados de números reales (a, b), con $(a, b) \neq (0, 0)$, tales que $6(a^2 + b^2) = 13ab$. Al variar sobre todos los pares ordenados $(a, b) \in S$, ¿cuántos posibles valores puede tomar la expresión $\frac{a+b}{a-b}$?

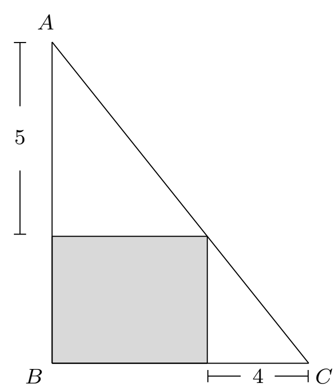
   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 5

6. En la siguiente figura, el triángulo ABC es rectángulo en B.



¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?

   (a) 9

   (b) 10

   (c) 18

   (d) 20

7. Sea n un número entero positivo. Considere el número $A = 5^n + (10n + 30)^{2024}$. El residuo que se obtiene al dividir A por 20 corresponde a

   (a) 5

   (b) 10

   (c) 0

   (d) 15

8. Charlene, Luis y Salomón estaban de paseo y se preguntaban qué tan lejos estaba el pueblo más cercano. Cuando Charlene dijo: Estamos a más de 10 kilómetros de distancia, Luis respondió: Estamos máximo a 8 kilómetros de distancia. Salomón luego comentó: En realidad, el pueblo más cercano está máximo a 6 kilómetros de distancia. Resultó que ninguna de las tres afirmaciones era verdadera. ¿Cuál de los siguientes opciones presenta las posibles distancias al pueblo más cercano?

   (a) El pueblo se encuentra a más de 8 km, pero máximo a 10 km.

   (b) El pueblo se encuentra a más de 1 km, pero máximo a 6 km.

   (c) El pueblo se encuentra a menos de 8 km.

   (d) El pueblo se encuentra a más de 6 km, pero máximo a 8 km.

9. Considere el número $abcabc$, con a, b y c dígitos. Con toda certeza, un divisor primo del número $abcabc$ corresponde a:

   (a) 13

   (b) 17

   (c) 19

   (d) 23

10. Una profesora de ciencias de secundaria está planeando una excursión a un parque temático de ciencias junto con un grupo de 41 estudiantes. Al consultar por los precios de las entradas, el parque le brinda la siguiente información:

Cantidad de entradas	**Precio**
Entradas individuales (máximo 30)	
1 entrada	₡17 500
2 entradas	Descuento de 2 % del total
3 entradas	Descuento de 3 % del total
n entradas	Descuento de n % del total
Ofertas de grupo	
10 entradas	₡154 000
15 entradas	₡220 500
20 entradas	₡287 000

Además de esto le informan que por cada compra de 15 entradas individuales le regalan una entrada de cortesia.
Se quiere comprar las 42 entradas (de los estudiantes y la profesora) de forma que no sobre ninguna. Si se consideran todas las formas posibles de comprar las entradas, se puede afirmar que la opción más económica para comprar:

(a) son dos paquetes de 15 entradas, un paquete de 10 entradas y dos individuales

(b) son dos paquetes de 10 entradas y 22 individuales

(c) es un paquete de 20 entradas y 22 individuales

(d) no es ninguna de las opciones anteriores

11. Se lanza simultáneamente una moneda y dos dados de seis caras sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un escudo y un número primo al sumar el puntaje obtenido de las caras orientadas hacia arriba de los dos dados?

(a) $\frac{5}{12}$

(b) $\frac{5}{24}$

(c) $\frac{7}{12}$

(d) $\frac{7}{24}$

12. El número de soluciones reales de la ecuación

$$|2x-5|-|x+2|=5x-9$$

es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

13. El área del cuadrilátero formado por los puntos $(1,2)$, $(-3,4)$, $(-5,-6)$ y $(7,-8)$ es igual a

(a) 70

(b) 72

(c) 74

(d) 76

14. La cantidad de números primos p tales que $p+27$ es un cubo perfecto (es decir, que sea número de la forma a^3 con a entero), corresponde a

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

15. En el plano cartesiano, sean $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ y $P=(a,b)$ con a y b enteros positivos. ¿Cuál de las siguientes números corresponde a un valor que $\cos(\angle AOP)$ no puede tomar?

(a) $\dfrac{7}{25}$

(b) $\dfrac{8}{17}$

(c) $\dfrac{9}{41}$

(d) $\dfrac{10}{37}$

16. Diana escribió los primeros 2024 cuadrados perfectos en la pizarra:
$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2023^2, 2024^2.$$
Luego, escogió cinco al azar, los sumó y se dió cuenta que el resultado era múltiplo de 3, pero no era múltiplo de 9. Entonces la cantidad de números que Diana escogió que son divisibles por 3 es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

17. Alejandro escoge dos números distintos, al azar, del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sumar estos dos números, el resultado sea divisible por 3 e impar?

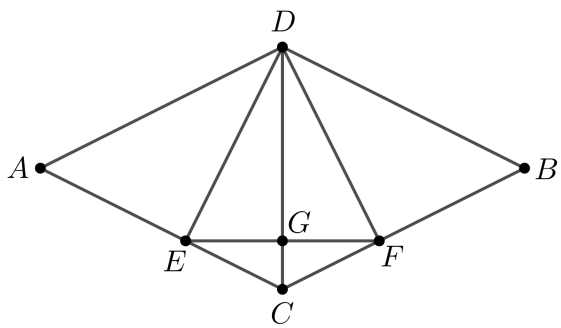
    (a) $\dfrac{13}{95}$.

    (b) $\dfrac{17}{95}$.

    (c) $\dfrac{23}{95}$.

    (d) $\dfrac{29}{95}$.

18. En la figura adjunta, el cuadrilátero $ADBC$ es un rombo. Además, se cumple que $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DF} \perp \overline{BC}$, $DE = DF = 3$, $EF = 4$. Asuma que $DC \cdot DG = 9$.



La medida del lado del rombo $ADBC$ corresponde a

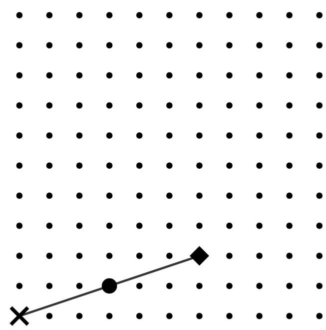
(a) $\frac{3}{10}\sqrt{5}$

(b) $\frac{27}{20}\sqrt{5}$

(c) $\frac{27}{52}\sqrt{13}$

(d) $\frac{9}{52}\sqrt{13}$

19. Emmanuel y Kory se encuentran en una gira de divulgación por la Zona Sur y ven plantaciones de palma. En cierto momento se encuentran en una esquina (marcada en la figura con la X) de una finca que tiene 11 filas y 11 columnas de palmas; las filas y las columnas están igualmente espaciadas entre sí. La esquina donde se encuentran no tiene una palma, por lo que en la plantación hay un total de $11^2 - 1 = 120$ palmas.



Representando las palmas por puntos (es decir, las palmas no tienen grosor), decimos que una palma Q es **invisible** para ellos si existe otra palma P, tal que P se encuentra en el segmento que une a Q con la esquina (desde donde Emmanuel y Kory observan). Por ejemplo, en la figura se muestra por qué la palma ♦ es invisible para ellos. De las 120 palmas, la cantidad de palmas invisibles para ellos es igual a

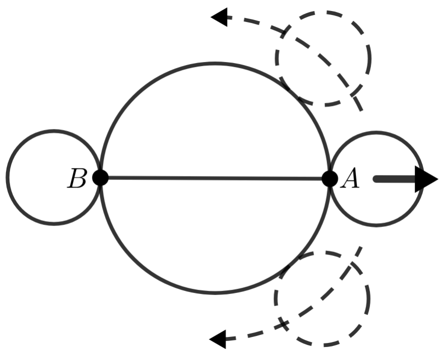
(a) 55

(b) 59

(c) 61

(d) 65

20. En la siguiente figura ilustrativa, $\overline{AB}$ es un diámetro de una moneda de radio 5. Se coloca una moneda de radio 2 de forma que ambas sean tangentes exteriormente en A, con una flecha pintada hacia la derecha (como se indica en la figura). Ana y Beto juegan girando la moneda pequeña alrededor de la circunferencia de la moneda grande, desde la posición original (como en la figura) hasta detenerse cuando sean tangentes en el punto B. Ana rueda la moneda por arriba y Beto la rueda por abajo.



Cuando ambos finalizaron, las flechas de Ana y Beto, en ese orden, apuntaron hacia

(a) la derecha e izquierda

(b) la izquierda y derecha

(c) arriba y abajo

(d) abajo y arriba