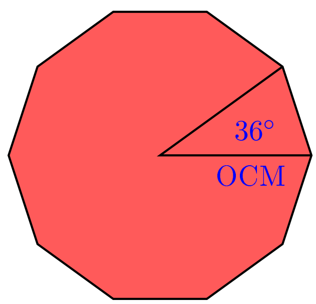
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Examen con Soluciones
I Eliminatoria Nacional



Nivel I

(7°)

2024

Estimado estudiante:
La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2024 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la I Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

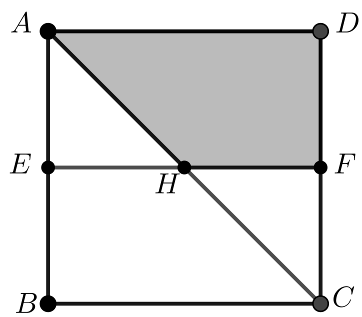
INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. En la siguiente figura, el cuadrilátero $\square ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 12 unidades.



Si $AE = EB$ y $m\angle BEF = 90°$, determine el área de la región sombreada.

(a) $A = 36$
(b) $A = 42$
(c) $A = 54$
(d) $A = 18$

Opción correcta: (c)

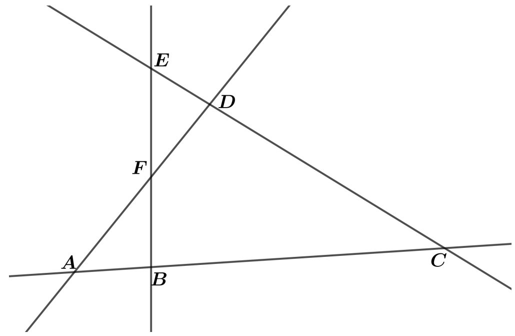
Solución: Note que, como la medida del $\measuredangle BEF = 90$ y $AE = BE$ entonces E es el punto medio del segmento AB, y F es el punto medio del segmento DC. Por lo que el segmento $DF = 6$.

Ahora, note que el punto H es el punto centro del cuadrado por lo que el segmento FH también mide 6.

Por último, note que el área sombreada de la figura corresponde al área de un trapecio por lo que

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(12+6)\cdot 6}{2} = 54$$

2. En la figura adjunta, m$\angle DCB = 42°$, m$\angle BED = 38°$ y m$\angle FAB = 60°$.



Entonces la medida del ángulo BFD es

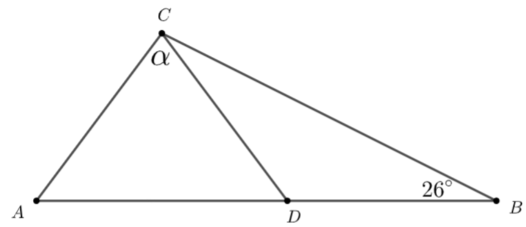
(a) 140°
(b) 100°
(c) 150°
(d) 120°

Opción correcta: (a)

Solución:

Se tiene que m$\angle FBC = 100°$. Luego, la m$\angle FBA = 80°$. Finalmente, por el teorema del ángulo externo, la m$\angle BFD = 140°$.

3. Considere la siguiente figura:



Si $AC = CD$, $CD = BD$, entonces la medida del ángulo α es

(a) $26°$
(b) $53°$
(c) $76°$
(d) $128°$

Opción correcta: (c)

Solución: Se tiene que $CD = BD$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles, entonces los ángulos $\angle CBD = \angle BCD$. Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:

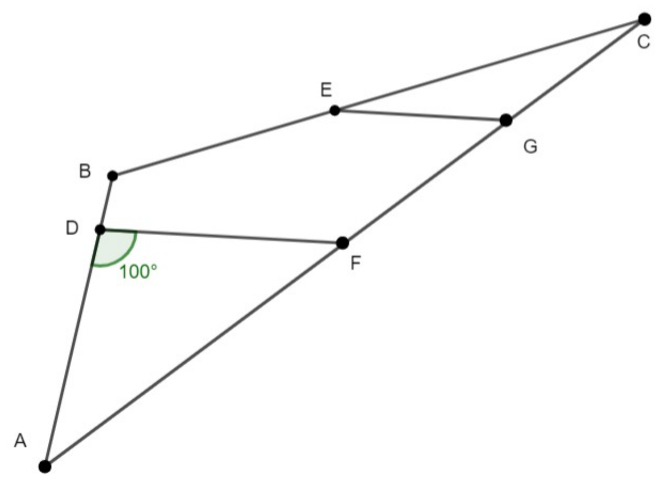
$m\angle CDB + 26° + 26° = 180° \Rightarrow m\angle CDB = 128°$.

El ángulo $\angle CDA$ es suplementario al ángulo $\angle CDB$, entonces, $m\angle CDA = 180° - 128° = 52°$.

Por otro lado se tiene que: $AC = CD$, entonces $\angle CDA = \angle CAD$, entonces, $m\angle CAD = 52°$. Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:

$52° + 52° + m\angle\alpha = 180° \Rightarrow m\angle\alpha = 76°$.

4. Considere la siguiente figura:

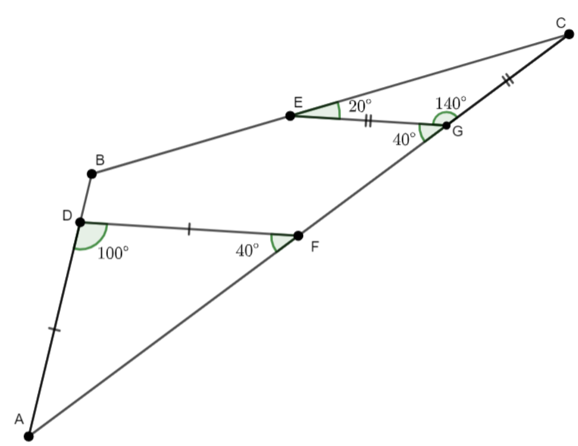


En el $\triangle ABC$ se tiene que $\overline{DF} \parallel \overline{GE}$ y $AD = DF$, además $\triangle EGC$ es isósceles. Si el ángulo $\angle ADF$ mide $100°$, entonces la medida del ángulo $\angle CEG$ es

(a) $20°$
(b) $30°$
(c) $60°$
(d) $80°$

Opción correcta: (a)

Solución:



Como $AD = DF$, entonces el ángulo $\angle DAF$ y el $\angle AFD$ miden lo mismo, es decir $40°$. Además como $\overline{DF} \parallel \overline{GE}$ se tiene $m\angle EGF = 40°$. Por par lineal (ángulo llano) el ángulo $\angle EGC = 140°$. Luego como el triángulo $\triangle EGC$ es isósceles o obtusangulo se tiene que $m\angle GCE = m\angle GEC = 20°$.

5. Luis, Sara y Melissa conducen cada uno un autobús con diferentes rutas que tienen una parada en común. La ruta de Luis pasa cada 30 minutos por esa parada, la ruta de Sara pasa cada 36 minutos y la ruta de Melissa pasa cada 12 minutos. ¿Cuántas veces al día coinciden los tres autobuses en esa parada si los tres trabajan 12 horas diarias y empiezan a trabajar a la misma hora en esa misma parada?

   (a) 4
   (b) 12
   (c) 60
   (d) 180

   Opción correcta: (a)

   Solución: Debido a que lo que se quiere es determinar un múltiplo común de esos tres números, se debe calcular el mínimo común múltiplo de esas cantidades, que es el tiempo en que los tres choferes coinciden en la misma parada.

   El $\text{mcm}(30, 36, 12) = 180$. Es decir los tres choferes coinciden en la misma parada cada 180 minutos, es decir, cada 3 horas. Si trabajan 12 horas diarias $12 \div 3 = 4$, por lo que la cantidad de veces que coinciden en la misma parada es 4.

6. El número N es el menor número positivo, de tres dígitos, que al sumarle 7 unidades el resultado es divisible por $10, 15$ y 33. La suma de los dígitos de N corresponde a:

   (a) 7
   (b) 8
   (c) 13
   (d) 20

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   El menor número que es divisible por $10, 15$ y 33 es el mínimo común múltiplo, es decir, $2 * 5 * 3 * 11 = 330$. Ahora bien, N debe ser 7 unidades menor a 330, entonces $N = 323$. La suma de los dígitos de N es $3 + 2 + 3 = 8$.

7. Al efectuar el producto de todos los números impares comprendidos entre el 500 y 2024, ¿cuál es la cifra de las unidades del número resultante?

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 3
   (d) 5

   Opción correcta: (d)

   Solución:

   Al iniciar las multiplicaciones.

$$\begin{gathered}501 \cdot 503 = \ldots 3 \\ 501 \cdot 503 \cdot 505 = \ldots 5 \\ 501 \cdot 503 \cdot 505 \cdot 507 = \ldots 5\end{gathered}$$

   Observe que el resultado de las unidades a partir de la segunda multiplicación es 5.

8. Considere la siguiente secuencia:

$$B4C14CB14B4C14CB14B4C14CB14B4C14C\ldots$$

Según la información anterior, el número o la letra que se encuentra en la posición 2024 corresponde a

(a) 1
(b) 4
(c) B
(d) C

Opción correcta: (a)

Solución: En la secuencia dada, se puede ir realizando agrupaciones de 9 en 9. Como hay que determinar el número o la letra que se encuentra en la posición 2024, se procede aplicar el algoritmo de la división, es decir, al dividir 2024 por 9, el cociente es 224 y el residuo es 8. Por lo anterior, se puede realizar 224 agrupaciones completas de 9 y residuo es 8, quiere decir, corresponde al número o letra que se ubica en la posición ocho de las posibles nueve posiciones que se tiene en cada agrupación. Por lo tanto, en la posición 2024 se tiene al número 1.

9. Sabiendo que

$$\begin{aligned} 95^2 &= 9025 \\ 995^2 &= 990025 \\ 9995^2 &= 99900025 \end{aligned}$$

¿cuál es la suma de los dígitos del número $(\underbrace{999\ldots995}_{40 \text{ cifras}})^2$?

(a) 328

(b) 344

(c) 352

(d) 358

Opción correcta: (d)

Solución: disminuyendo la cantidad de cifras del número original a 4 cifras y en 7 cifras obtenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 9 & 9 & 9 & 5 \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & 5 \\
\hline
 & & & 4 & 9 & 9 & 7 & 5 \\
 & & 8 & 9 & 9 & 5 & 5 & - \\
 & 8 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - \\
8 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - & - \\
\hline
9 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

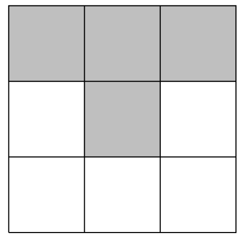
$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 \\
\hline
 & & & & & & 4 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 7 & 5 \\
 & & & & & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - \\
 & & & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - & - \\
 & & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - & - & - \\
 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - & - & - & - \\
8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & - & - & - & - & - & - \\
\hline
9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

Observando que se cumple un patron en los dos primeros dígitos del resultado (25) y además se obtiene que la cantidad de nueves en el resultado en igual a la cantidad de dígitos utilizados menos uno.

Por tanto para obtener la suma de las cifras del resultado original (40 cifras) tendríamos 40-1 nueves mas los dígitos 2 y 5.

La suma resulta al hacer la operación $9 \cdot 39 + 2 + 5 = 358$.

10. Diana quiere escribir los números del 1 al 9 en los cuadrados del tablero que aparece abajo, de forma tal que la suma de dos números en cuadrados vecinos (con un lado en común) sea un número impar, y que además la suma en los cuadrados grises sea la mayor posible. Entonces la suma de los números en los cuadrados blancos es igual a



(a) 15.
(b) 16.
(c) 17.
(d) 18.

Opción correcta: (b)

Solución: Observe que la mejor opción para rellenar las casillas en gris es colocar los números 9, 8, 7 y 6. Sin embargo, para que se cumpla la condición de paridad deben colocarse números pares e impares de forma consecutiva en cuadrados vecinos. Si se ubican los impares en las esquinas, en la casilla en medio de la fila de arriba debe colocarse el 8, pero entonces no se puede ubicar el 6 debajo. De la misma forma si se ubican los pares en las esquinas, entonces en medio se ubica el 9, pero no se puede ubicar el 7 debajo. En consecuencia, deben ubicarse tres pares y un impar, o tres impares y un par. La mejor opción es ubicar 9, 7 y 5 como impares, y 8 como par. Luego, falta verificar que es posible lograr un arreglo de esta forma. Un ejemplo se muestra a continuación.

9	8	7
6	5	4
3	2	1

11. Con palillos de un 1 cm de longitud se construyen figuras como las que se presentan a continuación, siguiendo el patrón. ¿Cuántos palillos se usarán para construir la figura 2024?

Figura 1 Figura 2 Figura 3

(a) 8091
(b) 8092
(c) 8095
(d) 8099

Opción correcta: (c)

Solución: Note que en la primera figura se usa 3 palillos, mientras que en la segunda $7 = 3 + 4$ en la tercera $11 = 3 + 4 \cdot 2$, lo que significa que en la figura 4 se usarán $3 + 4 \cdot 3$ y así sucesivamente. Por lo tanto en la figura 2024 se usaran $3 + 4 \cdot 2023 = 8095$.

12. En un salón hay ocho estudiantes resolviendo problemas de olimpiadas de matemática. Con certeza se puede asegurar que al menos dos estudiantes nacieron

    (a) el mismo día.
    (b) la misma semana.
    (c) el mismo mes.
    (d) el mismo bimestre.

    Opción correcta: (d)

    Solución: Se sabe que un año está conformado por 6 bimestres. Como son ocho estudiantes, se puede garantizar que al menos dos estudiantes nacieron el mismo bimestre.

13. En una academia de idiomas hay cursos de inglés y de portugués. Hay 29 personas que estudian inglés, 14 que estudian portugués y 8 que estudian ambos idiomas. Si se elige una de las personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona estudie únicamente uno de los dos idiomas?

    (a) $\frac{27}{35}$

    (b) $\frac{8}{15}$

    (c) $\frac{21}{29}$

    (d) $\frac{8}{14}$

    Opción correcta: (a)

    Solución:

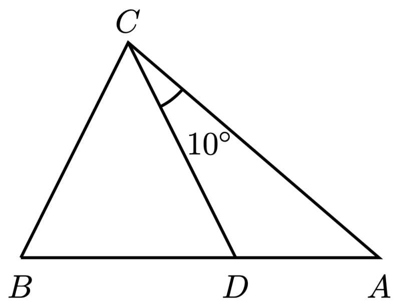
    En total hay 35 personas matriculadas en los dos cursos ($29+14-8=35$). De esas 35 personas, 21 estudian únicamente inglés ($29-8$) y 6 estudian únicamente portugués ($14-8$); es decir, hay 27 personas de las 35 que estudian únicamente uno de los idiomas.

14. Considere el $\triangle ABC$, donde $m\angle CAB + m\angle ABC = 110°$ y D es un punto de $\overline{AB}$ tal que $CD = CB$ y $m\angle DCA = 10°$. ¿Cuál es la medida de $\angle CAB$?

    (a) $60°$
    (b) $50°$
    (c) $40°$
    (d) $30°$

    Opción correcta: (b)

    Solución: Considere la siguiente figura:



La suma de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$ es $180°$. Como $m\angle A + m\angle B = 110°$, entonces $m\angle BCA = 70°$. Si $m\angle DCA = 10°$, $m\angle BCD = 70° - 10° = 60°$. Además, el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles, con $\overline{CD} = \overline{CB}$, de modo que $m\angle DBC = m\angle CDB$. Ahora, la suma de los ángulos interiores de $\triangle BCD$ es $180°$, de donde $m\angle DBC = m\angle CDB = 60°$. Por último, en $\triangle ACD$, el ángulo exterior $\angle CDB$ es la suma de los ángulos interiores opuestos $\angle A$ y $\angle DCA$. Por lo tanto, $m\angle A = m\angle CDB - m\angle DCA = 60° - 10° = 50°$.

15. Sean k y r números enteros positivos. Si $(10k+4)(10k+r) = 2024$, entonces ¿cuál es el valor de r?

    (a) 2
    (b) 4
    (c) 6
    (d) 8

    Opción correcta: (c)

    Solución:

    Se tiene que
$$\begin{aligned} 2024 &= 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \\ &= 2^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 23 \\ &= 44 \cdot 46 \\ &= (10 \cdot 4 + 4) \cdot (10 \cdot 4 + 6) \end{aligned}$$

16. Suponga que se lanza un dado dos veces, considere las siguientes afirmaciones:

   I. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea un número primo es $\frac{15}{36}$.

   II. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea un número par es $\frac{21}{36}$.

   III. La probabilidad de que la suma de los dos resultados sea 1 es 0.

   Con certeza se puede afirma que:

   (a) Solamente la I es verdadera.
   (b) Solamente la II es verdadera.
   (c) Solamente la II y la III son verdaderas.
   (d) Solamente la I y la III son verdaderas.

   Opción correcta: (d)

   Solución:

   Considere la siguiente tabla

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Los resultados primos son 2,3,5,7,11 y contando cuantas veces salen en el cuadro se obtiene 15 de un total de 36 resultados por lo cual se obtiene que la probabilidad de que salga un número primo es $\frac{15}{36}$, así la I. es verdadera. Luego, la III. es verdadera pues este resultado es imposible que salga como resultado de la suma. Y la II. es falsa pues lo correcto es $\frac{1}{2}$.

17. Lucía necesita un código de tres dígitos para abrir su casillero. Sin embargo, para obtener el código le dan las siguientes pistas:

    I. El código 738 no tiene ningún dígito correcto.
    II. El código 985 tiene un dígito correcto, pero está en la posición equivocada.
    III. El código 257 tiene dos dígitos correctos, pero están en posiciones equivocadas.
    IV. El código 792 tiene un dígito correcto y está en el lugar correcto.
    V. El código 794 tiene un dígito correcto, pero está en la posición equivocada.

    Entonces

    (a) El código es 972.
    (b) El código es 532.
    (c) El código es 542.
    (d) Es imposible que Lucía obtenga el código con esas pistas.

    Opción correcta: (c)

    Solución:

    De la pista I se descartan el 7, el 3 y el 8. Luego, de la pista II, se sabe que el código tiene un 9 o un 5, que están en una posición incorrecta. De la III se descarta al 9, es decir, el código empieza con 5 y, además, tiene un 2. Por la pista IV, se tienen como candidatos el 2 y el 7, que al complementar con la V pista se descarta el 7 y, además, el 2 va en la posición de las unidades. La V pista permite deducir que el tercer dígito es el 4, por lo que el código que Lucía necesita para abrir el casillero es el 542.

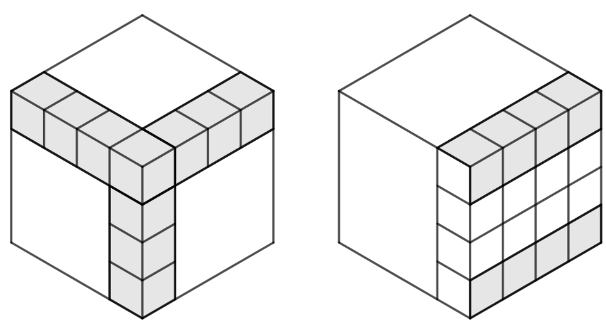
18. Ana construye un cubo, usando 64 cubitos de un centímetro de arista. Después de pintar completamente tres caras de dicho cubo, separa los cubitos pequeños y nota que 8 de ellos tienen exactamente dos caras pintadas. ¿Cuántos cubitos de 1 cm de arista tienen exactamente una cara pintada?

    (a) 18
    (b) 24
    (c) 27
    (d) 32

    Opción correcta: (d)

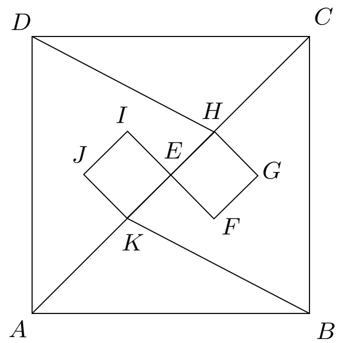
    Solución:

    Si Ana pinta tres caras que comparten un mismo vértice entonces se tendrán 9 cubitos con exactamente dos caras pintadas, como se muestra en la figura izquierda, por lo tanto ella pintó dos caras opuestas (por ejemplo arriba y abajo) y una cara que comparte arista con ellas (cara lateral), como es muestra en la figura derecha.



Por lo tanto los cubitos con exactamente una cara pintada serán: 12 arriba, 12 abajo y 8 en la cara lateral, para un total de 32.

19. En la figura abajo, los cuadriláteros $\square ABCD$, $\square EFGH$, $\square EIJK$ son cuadrados. Además, $FG = \frac{AE}{3}$, $\overline{IF}$ está sobre la diagonal $\overline{DB}$ y los dos cuadrados pequeños tienen las mismas medidas.



Considere las siguientes afirmaciones:

I. Si $FG = 1$ entonces $3 \cdot (AHD) = 18$.

II. Si $AE = 1$ entonces $2 \cdot (AHD) = 3$.

III. Si $FG = 1$ entonces $(AKB) = 3$.

Con certeza se puede afirmar que

(a) solamente la I y la II son verdaderas.

(b) solamente la I y la III son verdaderas.

(c) solamente la II y la III son verdaderas.

(d) solamente la I es verdadera.

Opción correcta: (b)

Solución:

En forma general se tiene que $(AHD) = \frac{AH \cdot AE}{2} = \frac{(AE+EH) \cdot AE}{2} = \frac{2(AE)^2}{3}$. Luego, con esto se puede ver que la afirmación I. es verdadera y que la II. es falsa. Luego, para la afirmación III. se tiene que $AK = 2$ y por lo tanto $(AKD) = 2 * 3/2 = 3$.

20. Sean y el menor número con 15 divisores y x el menor número con 12 divisores. Considere la siguientes afirmaciones:

    I. $y - x$ es divisible por 8.

    II. Si z es el menor número con 13 divisores, entonces $x < z < y$.

    III. $12|x$ y $15|y$.

    Con certeza se puede afirmar que

    (a) solamente la I es verdadera.

    (b) solamente la II es verdadera.

    (c) solamente la II y la III son verdaderas.

    (d) todas las afirmaciones son falsas.

    Opción correcta: (d)

    Solución:
    Se sabe que $15 = 5 \cdot 3$ de donde se tiene que el menor número con 15 divisores es $y = 2^4 3^2 = 144$. Similarmente, $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ de donde se tiene $x = 2^2 3^1 3^1 = 60$. Con esto en mano se verifica que $\dfrac{y-x}{8} = \dfrac{21}{2} \notin \mathbb{Z}$. Luego, $z = 2^{12}$ el cual claramente es mayor a y. Además, es claro que 15 no divide a 144.