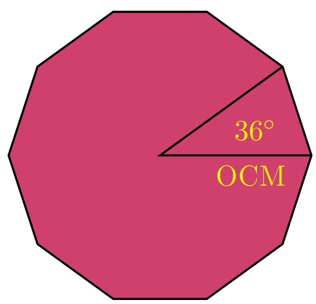
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Examen con soluciones
I Eliminatoria Nacional



Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2024

Estimado estudiante:
La Comisión organizadora de la 36° Olimpiada Costarricense de Matemáticas le saluda y le da la más cordial bienvenida a la I Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

1. Sea k un número real tal que la ecuación

$$\frac{x+\sqrt{x-k}}{x-\sqrt{x-k}}=2$$

tiene solución única. Un intervalo que contiene a k corresponde a

(a) $[0,1]$
(b) $[2,3]$
(c) $[4,5]$
(d) $[6,7]$

Opción correcta: (b)

Solución: Observe que

$$\begin{aligned}\frac{x+\sqrt{x-k}}{x-\sqrt{x-k}}=2 \quad &\Rightarrow \quad x+\sqrt{x-k}=2x-2\sqrt{x-k}\\ &\Rightarrow \quad 3\sqrt{x-k}=x\\ &\Rightarrow \quad x^2=9(x-k)\\ &\Rightarrow \quad x^2-9x+9k=0\,,\end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática. En este caso, se calcula el discriminante,

$$\Delta=(-9)^2-4\cdot 1\cdot(9k)=9(9-4k).$$

Para que tenga solución única debe suceder que $\Delta=0$ y por lo tanto $k=9/4$, con lo cual $k\in[2,3]$.

2. Considere la ecuación $4n^2 = 323 \cdot 2^{m-1} + 1$, donde m y n son enteros positivos. La cantidad de pares ordenados de enteros positivos (m, n) que son solución de la ecuación corresponde a

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Observe que

$$\begin{aligned} 4n^2 = 323 \cdot 2^{m-1} + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4n^2 - 1 = 323 \cdot 2^{m-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (2n-1)(2n+1) = 323 \cdot 2^{m-1}\,. \end{aligned}$$

   Como $2n-1$ y $2n+1$ son ambos números impares, entonces necesariamente $m = 1$. Sustituyendo se obtiene que

$$(2n-1)(2n+1) = 323 \cdot 2^{m-1} = 323 = 17 \cdot 19 = 1 \cdot 323\,.$$

   Por otro lado, como $2n - 1 < 2n + 1$, entonces se tiene dos casos,

$$2n - 1 = 17 \quad \text{y} \quad 2n + 1 = 19,$$

   o sino

$$2n - 1 = 1 \quad \text{y} \quad 2n + 1 = 323.$$

   Del primer caso se obtiene que $n = 9$, y del segundo no hay solución. Por lo tanto, la única solución es $m = 0$ y $n = 9$.

3. Sea $n = abcde$, con a, b, c, d, e dígitos. Se sabe que n es número impar divisible por 3 y 5.

   Considere las siguientes afirmaciones:

   I. Si $a = 4$ entonces el número bcd es par.

   II. Si $a = 4$ entonces el número bcd es divisible por 3.

   III. Si bcd es divisible por 3 entonces, $a = 4$.

   Con certeza se puede afirmar que:

   (a) Solamente la I es verdadera.

   (b) Solamente la II es verdadera.

   (c) Solamente la II y la III son verdaderas.

   (d) Todas las afirmaciones anteriores son verdaderas.

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   Como se dice que n es un número impar divisble por 3 y 5 entonces se tiene que $n = abcd5$ y, además, $a + b + c + d + 5 = 3k$, para algún entero k.

   Luego, si $a = 4$ entonces $b + c + d = 3(k - 3)$, de donde se deduce que bcd es divisible por 3. Por tanto la proposición II es verdadera.

   Para descartar la opción (d) basta ver que una posible combinación de la (a) es $b = c = d = 1$, de donde se tiene que 111 no es par y todos los otros requisitos se siguen cumpliendo, es decir 41115 es impar, divisible por 3 y 5.

4. La cantidad de divisores positivos del número 999999 corresponde a:

   (a) 59
   (b) 64
   (c) 68
   (d) 72

   Opción correcta: (b)

   Solución:
   El número 999999 se puede expresar como $10^6 - 1$ y se puede factorizar como

$$10^6 - 1 = (10^3 - 1)(10^3 + 1) = 999 \cdot 1001 = 9 \cdot 111 \cdot 11 \cdot 91 = 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13.$$

Así, por el teorema de la cantidad de divisores positivos de un número, encontramos que la cantidad de divisores es

$$(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 64.$$

5. Sea S el conjunto de los pares ordenados de números reales (a, b), con $(a, b) \neq (0, 0)$, tales que $6(a^2 + b^2) = 13ab$. Al variar sobre todos los pares ordenados $(a, b) \in S$, ¿cuántos posibles valores puede tomar la expresión $\frac{a+b}{a-b}$?

   (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 5

   Opción correcta: (a)

   Solución: La ecuación se puede reescribir como

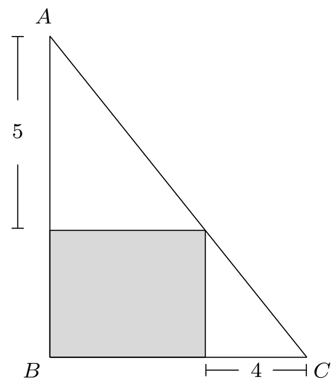
$$6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0 \iff (2a - 3b)(3a - 2b) = 0.$$

   Por lo tanto,$(a, b) \in S$ si y solo $b = 2a/3$ o $b = 3a/2$, y $a \neq 0$. Con esto vemos que las fracciones $\frac{a+b}{a-b}$ pueden tomar los valores

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{a + 2a/3}{a - 2a/3} = \frac{5a/3}{a/3} = 5 \quad \text{o} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{a + 3a/2}{a - 3a/2} = \frac{5a/2}{-a/2} = -5.$$

   En efecto, el valor 5 se puede alcanzar con $(a, b) = (3, 2)$ y el valor -5 con $(a, b) = (2, 3)$. Por lo tanto, las fracciones pueden tomar dos posibles valores.

6. En la siguiente figura, el triángulo ABC es rectángulo en B.



¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?

(a) 9
(b) 10
(c) 18
(d) 20

Opción correcta: (d)

Solución:

Sean x la medida de la base del rectángulo sombreado y y su altura. Si A representa el área sombreada, entonces

$$A = xy$$

Se puede verificar que los triángulos sin sombrear (el que está arriba y el que está a la derecha del rectángulo) son semejantes, pues tienen dos ángulos congruentes. Entonces

$$\frac{5}{y} = \frac{x}{4} \Rightarrow xy = 20$$

Por lo tanto, $A = 20$.

7. Sea n un número entero positivo. Considere el número $A = 5^n + (10n + 30)^{2024}$. El residuo que se obtiene al dividir A por 20 corresponde a

   (a) 5
   (b) 10
   (c) 0
   (d) 15

   Opción correcta: (a)

   Solución:

   Note que
   $$\begin{aligned} A &= 5^n + 10^{2024}(n+3)^{2024} \\ &= 5^n + 2^2 \cdot 2^{2022} \cdot 5 \cdot 5^{2023}(n+3)^{2024} \\ &= 5^n + 20 \cdot 2^{2022} \cdot 5^{2023}(n+3)^{2024} \\ &= 5^n + 20j \end{aligned}$$
   donde $j = 2^{2022} \cdot 5^{2023}(n+3)^{2024} \in \mathbb{Z}$.

   Y dado que 5^n deja residuo 5 al dividirlo por 20, entonces el residuo de dividir A por 20 corresponde a 5.

8. Charlene, Luis y Salomón estaban de paseo y se preguntaban qué tan lejos estaba el pueblo más cercano. Cuando Charlene dijo: Estamos a más de 10 kilómetros de distancia, Luis respondió: Estamos máximo a 8 kilómetros de distancia. Salomón luego comentó: En realidad, el pueblo más cercano está máximo a 6 kilómetros de distancia. Resultó que ninguna de las tres afirmaciones era verdadera. ¿Cuál de los siguientes opciones presenta las posibles distancias al pueblo más cercano?

   (a) El pueblo se encuentra a más de 8 km, pero máximo a 10 km.
   (b) El pueblo se encuentra a más de 1 km, pero máximo a 6 km.
   (c) El pueblo se encuentra a menos de 8 km.
   (d) El pueblo se encuentra a más de 6 km, pero máximo a 8 km.

   Opción correcta: (a)

   Solución: Basta ver lo que dijo cada uno:

   Charlene dijo $]10, \infty[$

   Luis dijo $[0, 8]$

   Salomón dijo $[0, 6]$.

   Como cada uno estaba en lo incorrecto entonces los complementos son los correctos y por lo tanto la interseccion dará el intervalo correcto :

$$]\infty, 10] \cap]8, \infty] \cap]6, \infty] =]8, 10]$$

9. Considere el número $abcabc$, con a, b y c dígitos. Con toda certeza, un divisor primo del número $abcabc$ corresponde a:

   (a) 13

   (b) 17

   (c) 19

   (d) 23

   Opción correcta: (a)

   Solución:
   El número $abcabc$ según la notación desarrollada es

$$abcabc = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c = (10^3 + 1)(10^2a + 10b + c),$$

   donde la última factorización la obtuvimos sumando términos semejantes. Al factorizar $10^3+1 = 1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$ podemos asegurar con certeza que 13 es un divisor primo de estos números.

   Finalmente, al tomar $a = 1, b = 0, c = 0$ el número $abcabc = 100100$ se factoriza como $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, con lo cual no se puede asegurar que 17, 19 o 23 dividan siempre a los números $abcabc$.

10. Una profesora de ciencias de secundaria está planeando una excursión a un parque temático de ciencias junto con un grupo de 41 estudiantes. Al consultar por los precios de las entradas, el parque le brinda la siguiente información:

Cantidad de entradas	**Precio**
Entradas individuales (máximo 30)	
1 entrada	₡17 500
2 entradas	Descuento de 2 % del total
3 entradas	Descuento de 3 % del total
n entradas	Descuento de n % del total
Ofertas de grupo	
10 entradas	₡154 000
15 entradas	₡220 500
20 entradas	₡287 000

Además de esto le informan que por cada compra de 15 entradas individuales le regalan una entrada de cortesia.

Se quiere comprar las 42 entradas (de los estudiantes y la profesora) de forma que no sobre ninguna. Si se consideran todas las formas posibles de comprar las entradas, se puede afirmar que la opción más económica para comprar:

(a) son dos paquetes de 15 entradas, un paquete de 10 entradas y dos individuales

(b) son dos paquetes de 10 entradas y 22 individuales

(c) es un paquete de 20 entradas y 22 individuales

(d) no es ninguna de las opciones anteriores

Opción correcta: (d)

Solución: Note que si se compran dos paquetes de 15 entradas, un paquete de 10 entradas y el resto individuales se tiene lo siguiente:

2 paquetes de 15 entradas	₡441 000
1 paquetes de 10 entradas	₡154 000
2 entradas con 2 % de descuento	₡34 300
TOTAL	₡629 300

Ahora, si se compra dos paquetes de 10 entradas y el resto individuales se tiene lo siguiente:

2 paquetes de 10 entradas	₡308 000
21 entradas con 21 % de descuento	₡290 325
1 entrada gratis	₡0
TOTAL	₡598 325

Por otro lado, si se compra un paquete de 20 entradas y el resto individuales se tiene lo siguiente:

1 paquete de 20 entradas	₡287 000
21 entradas con 21 % de descuento	₡290 325
1 entradas gratis	₡0
TOTAL	₡577 325

Sin embargo, existe una combinación que genera el menor precio. Si se compra un paquete de 10 entradas, y el resto individuales se tiene lo siguiente:

1 paquete de 10 entradas	₡154 000
30 entradas con 30 % de descuento	₡367 500
2 entradas gratis	₡0
TOTAL	₡521 500

11. Se lanza simultáneamente una moneda y dos dados de seis caras sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un escudo y un número primo al sumar el puntaje obtenido de las caras orientadas hacia arriba de los dos dados?

    (a) $\dfrac{5}{12}$

    (b) $\dfrac{5}{24}$

    (c) $\dfrac{7}{12}$

    (d) $\dfrac{7}{24}$

    Opción correcta: (b)

    Solución: Considere C por corona y E por escudo. Cuando se lanza una moneda hay dos posibilidades, para un dado de seis caras hay seis posibilidades. Cuando se lanza una moneda y dos dados de manera simultáneamente, se tiene $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ casos posibles del experimento.

    Los casos favorables del evento son:

$$(E,1,1),(E,1,2),(E,1,4),(E,1,6),(E,2,1),(E,2,3),(E,2,5),$$

$$(E,3,2),(E,3,4),(E,4,1),(E,4,3),(E,5,2),(E,5,6),(E,6,1),(E,6,5)$$

.

    Es decir, los casos favorables del evento son 15.

    Por lo tanto, la probabilidad al lanzar una moneda y dos dados de seis caras sobre una mesa simultáneamente se obtenga un escudo y un número primo al sumar el puntaje obtenido de las caras orientadas hacia arriba de los dos dados es $\dfrac{15}{72} = \dfrac{5}{24}$.

12. El número de soluciones reales de la ecuación $|2x-5|-|x+2| = 5x-9$ es

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

Opción correcta: (a)

Solución 1: Sabemos que $|2x-5| = \pm(2x-5)$ y $|x+2| = \pm(x+2)$, esto nos da 4 posibilidades a estudiar.

- Si $|2x-5| = 2x-5$ y $|x+2| = x+2$, entonces
$$(2x-5)-(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow x-7 = 5x-9 \Longrightarrow 4x = 2 \Longrightarrow x = \frac{1}{2},$$
la cual no es una solución válida porque $|2x-5| = 2x-5 = -4 < 0$.
- Si $|2x-5| = 2x-5$ y $|x+2| = -(x+2)$, entonces
$$(2x-5)+(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow 3x-3 = 5x-9 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3,$$
la cual no es una solución válida porque $|x+2| = -(x+2) = -5 < 0$.
- Si $|2x-5| = -(2x-5)$ y $|x+2| = x+2$, entonces
$$-(2x-5)-(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow -3x+3 = 5x-9 \Longrightarrow 8x = 12 \Longrightarrow x = \frac{3}{2},$$
la cual es una solución válida porque $|2x-5| = -(2x-5) = 2$ y $|x+2| = x+2 = 7/2$.
- Si $|2x-5| = -(2x-5)$ y $|x+2| = -(x+2)$, entonces
$$-(2x-5)+(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow -x+7 = 5x-9 \Longrightarrow 6x = 16 \Longrightarrow x = \frac{8}{3},$$
la cual no es una solución válida porque $|x+2| = -(x+2) = -14/3 < 0$.

Por lo tanto, solo hay una solución.

Solución 2: Dados los cambios de signo en los valores absolutos, es suficiente considerar la ecuación en los intervalos $]-\infty,-2],]-2,5/2],]5/2,+\infty[$.

- Si $x \in]-\infty,2]$, entonces la ecuación es
$$-(2x-5)+(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow -x+7 = 5x-9 \Longrightarrow 6x = 16 \Longrightarrow x = \frac{8}{3},$$
la cual no pertenece al intervalo.
- Si $x \in]-2,5/2]$, entonces la ecuación es
$$-(2x-5)-(x+2) = 5x-9 \Longrightarrow -3x+3 = 5x-9 \Longrightarrow 8x = 12 \Longrightarrow x = \frac{3}{2},$$
la cual sí pertenece al intervalo.

- Si $x \in]5/2, +\infty[$, entonces la ecuación es

$$(2x-5)-(x+2)=5x-9 \Longrightarrow x-7=5x-9 \Longrightarrow 4x=2 \Longrightarrow x=\frac{1}{2},$$

  la cual no pertenece al intervalo.

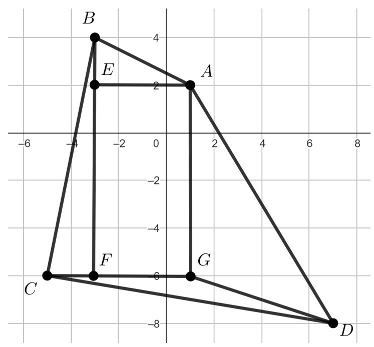
Por lo tanto, solo hay una solución.

13. El área del cuadrilátero formado por los puntos $(1, 2)$, $(-3, 4)$, $(-5, -6)$ y $(7, -8)$ es igual a

   (a) 70
   (b) 72
   (c) 74
   (d) 76

   Opción correcta: (d)

   • Solución 1: Sean $A = (1, 2)$, $B = (-3, 4)$, $C = (-5, -6)$ y $D = (7, -8)$. Adicionalmente, podemos considerar los puntos $E = (-3, 2)$, $F = (-3, -6)$ y $G = (1, -6)$, que pertenecen al interior del cuadrilátero, y con los cuales se puede formar un rectángulo $AEFG$ y cuatro triángulos ABE, BCF, CDG y ADG.



   Podemos calcular sencillamente las áreas del rectángulo y estos cuatro triángulos:

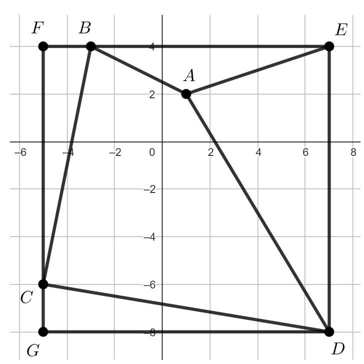
$$(AEFG) = (1 - (-3)) \cdot (2 - (-6)) = 32, \quad (ABE) = \frac{1}{2}(1 - (-3)) \cdot (4 - 2) = 4,$$

$$(BCF) = \frac{1}{2}(-3 - (-5)) \cdot (4 - (-6)) = 10, \quad (CDG) = \frac{1}{2}(1 - (-5))(-6 - (-8)) = 6,$$

$$(ADG) = \frac{1}{2}(2 - (-6)) \cdot (7 - 1) = 24.$$

   De esta forma, el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $32 + 4 + 10 + 6 + 24 = 76$.

   • Solución 2: Sean A, B, C, D como en la solución anterior y sean $E = (7, 4)$, $F = (-5, 4)$ y $G = (-5, -8)$, puntos de forma que $DEFG$ es un rectángulo que contiene al cuadrilátero $ABCD$.



Podemos calcular las áreas del cuadrilátero $DEFG$ y de los triángulos ABE, BCF, CDG, ADG de la siguiente manera:

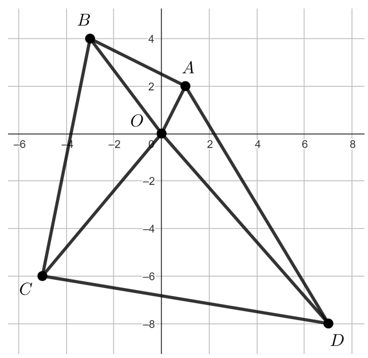
$$(DEFG) = (7-(-5)) \cdot (4-(-8)) = 144, \quad (ABE) = \frac{1}{2}(7-(-3)) \cdot (4-2) = 10,$$

$$(BCF) = \frac{1}{2}(-3-(-5)) \cdot (4-(-6)) = 10, \quad (CDG) = \frac{1}{2}(7-(-5)) \cdot (-6-(-8)) = 12$$

$$(ADG) = \frac{1}{2}(4-(-8)) \cdot (7-1) = 36.$$

De esta forma, el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $144 - (10+10+12+36) = 76$.

• Solución 3: Para esta solución requerimos saber que si $O = (0,0), P = (a,b), Q = (c,d)$ son tales que $\triangle OPQ$ es un triángulo orientado en sentido antihorario, entonces el área del triángulo OPQ es $(ad - bc)/2$.



Con lo anterior, podemos calcular las áreas de los triángulos OAB, OBC, OCD, ODA, mediante

$$(OAB) = \frac{1}{2}(1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)) = 5, \quad (OBC) = \frac{1}{2}((-3) \cdot (-6) - 4 \cdot (-5)) = 19,$$

$$(COD) = \frac{1}{2}((-5) \cdot (-8) - (-6) \cdot 7) = 41, \quad (ODA) = \frac{1}{2}(7 \cdot 2 - (-8) \cdot 1) = 11.$$

De esta forma, el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $5 + 19 + 41 + 11 = 76$.

14. La cantidad de números primos p tales que $p + 27$ es un cubo perfecto (es decir, que sea número de la forma a^3 con a entero), corresponde a

    (a) 1
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

    Opción correcta: (a)

    Solución: Empezamos reescribiendo la ecuación $p + 27 = a^3$ como $p = a^3 - 27$ y observamos que $27 = 3^3$. Por la fórmula de diferencia de cubos tenemos que

    $$a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9).$$

    Como este producto es un número primo y el factor $a^2 + 3a + 9$ es mayor que 1, entonces debe suceder que $a - 3 = 1$ y $a^2 + 3a + 9 = p$, con lo cual deducimos que $a = 4$. Con esto obtenemos que $p = a^3 - 27 = 64 - 27 = 37$ y por lo tanto hay una única solución.

15. En el plano cartesiano, sean $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ y $P=(a,b)$ con a y b enteros positivos. ¿Cuál de las siguientes números corresponde a un valor que $\cos(\angle AOP)$ no puede tomar?

(a) $\dfrac{7}{25}$

(b) $\dfrac{8}{17}$

(c) $\dfrac{9}{41}$

(d) $\dfrac{10}{37}$

Opción correcta: (d)

Solución: Por la definición del coseno de un ángulo agudo, sabemos que

$$\cos(\angle AOP)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Observamos que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{p}{q}\iff q^2a^2=p^2(a^2+b^2)\iff (q^2-p^2)a^2=p^2b^2\iff (q-p)(q+p)a^2=p^2b^2.$$

En el caso $\dfrac{7}{25}$ obtenemos que

$$18\cdot 32a^2=7^2b^2\iff 9\cdot 64a^2=7^2b^2\iff 24^2a^2=7^2b^2,$$

con lo cual la ecuación tiene solución al tomar $(a,b)=(7,24)$. En el caso $\dfrac{8}{17}$ obtenemos que

$$9\cdot 25a^2=8^2b^2\iff 15^2a^2=8^2b^2,$$

con lo cual la ecuación tiene solución al tomar $(a,b)=(8,15)$. En el caso $\dfrac{9}{41}$ obtenemos que

$$32\cdot 50a^2=9^2b^2\iff 64\cdot 25a^2=9^2b^2\iff 40^2a^2=9^2b^2,$$

con lo cual la ecuación tiene solución al tomar $(a,b)=(9,40)$. Finalmente, en el caso $\dfrac{10}{37}$ obtenemos que

$$27\cdot 47a^2=10^2b^2\iff 3^3\cdot 47a^2=9^2b^2,$$

la cual no tiene solución con a y b enteros positivos.

16. Diana escribió los primeros 2024 cuadrados perfectos en la pizarra:

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2023^2, 2024^2.$$

Luego, escogió cinco al azar, los sumó y se dió cuenta que el resultado era múltiplo de 3, pero no era múltiplo de 9. Entonces la cantidad de números que Diana escogió que son divisibles por 3 es

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

Opción correcta: (b)

Solución:

Observe que si a es un número divisible por 3 entonces su cuadrado también es divisible por 3, porque $a^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Por otro lado, si $a = 3k + 1$ o $a = 3k + 2$ entonces los cuadrados son

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \quad \text{y} \quad (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1\,,$$

es decir, los cuadrados son de la forma $3k+1$, si el número no es divisible por 3. Para que la suma de los cinco números sea divisible por 3 es necesario que la suma de los residuos de la división por 3 sea divisible por 3. En la siguiente tabla se presentan todas las combinaciones posibles.

a^2	b^2	c^2	d^2	e^2	Suma
1	1	1	1	1	5
0	1	1	1	1	4
0	0	1	1	1	3
0	0	0	1	1	2
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

En consecuencia, las únicas combinaciones que funcionan es que sean dos o cinco números divisibles por 3. Sin embargo, si los cinco números fueran divisibles por 3, entonces la suma total sería divisible por 9 (pues cada cuadrado lo sería), lo cual no es posible. Por lo tanto, la cantidad de números divisibles por 3 es 2.

17. Alejandro escoge dos números distintos, al azar, del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sumar estos dos números, el resultado sea divisible por 3 e impar?

   a) $\frac{13}{95}$.
   b) $\frac{17}{95}$.
   c) $\frac{23}{95}$.
   d) $\frac{29}{95}$.

   Opción correcta: b).

   Solución 1: Vamos a contar el número de parejas (x, y), con $x < y$, que cumplen la condición del problema. Primero notamos que, si para un x fijo, hay dos valores de y, digamos y_1 y y_2 tales que (x, y_1) y (x, y_2) ambos cumplen con las condiciones del problema, entonces $y_1 - y_2$ es divisible por 6. En efecto, si tanto $x + y_1$ como $x + y_2$ son divisibles por 3, entonces $(x + y_1) - (x + y_2) = y_1 - y_2$ es divisible por 3. Similarmente, si ambos $x + y_1$ y $x + y_2$ son números impares, entonces $(x + y_1) - (x + y_2) = y_1 - y_2$ es par. Como $y_1 - y_2$ es divisible por 3 y por 2, entonces es divisible por 6. Con esto en mente, sabiendo que los valores de y van en progresión aritmética de diferencia 6, podemos contar las parejas que funcionan:

x	valores para y.
1	2, 8, 14, 20.
2	7, 13, 19.
3	6, 12, 18.
4	5, 11, 17.
5	10, 16.
6	9, 15.
7	8, 14, 20.
8	13, 19.
9	12, 18.
10	11, 17.

   Si $x > 10$, es fácil ver cuáles son las parejas que pueden funcionar:

$$\{(11, 16), (12, 15), (13, 14), (13, 20), (14, 19), (15, 18), (16, 17), (19, 20)\}.$$

   Por lo tanto hay 34 parejas distintas que funcionan. Como en total hay $(20 \cdot 19)/2 = 190$ formas distintas de escoger dos números distintos entre 1 y 20, concluimos que la respuesta es

$$\frac{34}{190} = \frac{17}{95}.$$

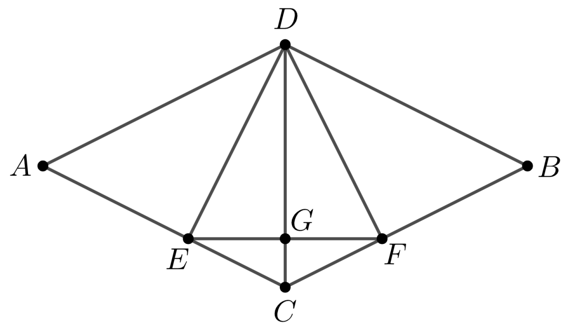
   Solución 2: Los números impares y diisibles por 3 que se pueden obtener sumando dos números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ son 3, 9, 15, 21, 27, 33, y 39. Tenemos que determinar de cuántas maneras puede, cada uno de estos, ser escrito como una suma. Formamos la siguiente tabla:

$x + y$	(x, y), con $x < y$
3	$(1, 2)$
9	$(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$
15	$(1, 14)$, $(2, 13)$, $(3, 12)$, $(4, 11)$, $(5, 10)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$
21	$(1, 20)$, $(2, 19)$, $(3, 18)$, $(4, 17)$, $(5, 16)$, $(6, 15)$, $(7, 14)$, $(8, 13)$, $(9, 12)$, $(10, 11)$
27	$(7, 20)$, $(8, 19)$, $(9, 18)$, $(10, 17)$. $(11, 16)$, $(12, 15)$, $(13, 14)$.
33	$(13, 20)$, $(14, 19)$, $(15, 18)$, $(16, 17)$.
39	$(19, 20)$.

Contamos que en total hay 34 parejas que funcionan. Como en total hay $(20 \cdot 19)/2 = 190$ posibles formas de escoger dos números distintos entre 1 y 20, concluimos que la probabilidad pedida es

$$\frac{34}{190} = \frac{17}{95}.$$

18. En la figura adjunta, el cuadrilátero $ADBC$ es un rombo. Además, se cumple que $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DF} \perp \overline{BC}$, $DE = DF = 3$, $EF = 4$. Asuma que $DC \cdot DG = 9$.



La medida del lado del rombo $ADBC$ corresponde a

(a) $\frac{3}{10}\sqrt{5}$

(b) $\frac{27}{20}\sqrt{5}$

(c) $\frac{27}{52}\sqrt{13}$

(d) $\frac{9}{52}\sqrt{13}$

Opción correcta: (b)

Solución:

Se tiene que $EG = GF = 2$ y $\angle DGE = 90°$. Por pitágoras al $\triangle DEG$, se tiene que $DG = \sqrt{5}$.

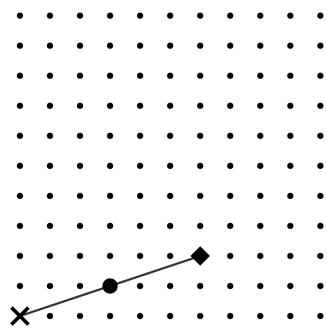
Además, note que $\triangle DEC \sim \triangle DGE$, pues $\angle DEC = \angle DGE = 90°$ y ambos triángulos comparten el ángulo en D. Por lo que $\angle ECD = \angle DEG$.

Luego, como $\triangle ADC$ es isósceles, entonces $\angle ADC = \angle ACD$. Además, el $\triangle DEF$ es isósceles, por lo que $\angle DEG = \angle DFG$.

De todo lo anterior se tiene que $\angle ADC = \angle ACD = \angle DEG = \angle DFG$, por lo que los triángulos ADC y DFE son semejantes.

Luego, dado que por hipótesis se tiene que $DC \cdot DG = 9$, entonces $DC = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Finalmente, de la semejanza entre $\triangle ADC$ y $\triangle DFE$ se obtiene que $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{DE}{FE} \Longrightarrow AC = \dfrac{27}{20}\sqrt{5}$.

19. Emmanuel y Kory se encuentran en una gira de divulgación por la Zona Sur y ven plantaciones de palma. En cierto momento se encuentran en una esquina (marcada en la figura con la X) de una finca que tiene 11 filas y 11 columnas de palmas; las filas y las columnas están igualmente espaciadas entre sí. La esquina donde se encuentran no tiene una palma, por lo que en la plantación hay un total de $11^2 - 1 = 120$ palmas.



Representando las palmas por puntos (es decir, las palmas no tienen grosor), decimos que una palma Q es **invisible** para ellos si existe otra palma P, tal que P se encuentra en el segmento que une a Q con la esquina (desde donde Emmanuel y Kory observan). Por ejemplo, en la figura se muestra por qué la palma ⧫ es invisible para ellos. De las 120 palmas, la cantidad de palmas invisibles para ellos es igual a

(a) 55
(b) 59
(c) 61
(d) 65

- Opción correcta: (a)
- Solución 1: Podemos representar los palmas por pares ordenados (a, b) con $0 \leq a, b, \leq 10$, de forma que Emmanuel y Kory se ubican en el punto $(0, 0)$. Vemos que si a y b comparten un divisor $d > 1$, entonces $(a/d, b/d)$ está en el segmento que une $(0, 0)$ y (a, b); por lo que (a, b) es un punto invisible. Conversamente, si (a, b) es un punto invisible, entonces existe un punto (c, d) y un racional $r = p/q > 1$ tal que $a = cr$ y $b = dr$. Lo anterior implica que p divide a a y b; como $r > 1$, entonces $p > 1$, por lo que a y b tienen un divisor común mayor a 1.

  De esta forma podemos hacer el conteo en cada fila:

b	Puntos invisibles (a, b)	Cantidad
0	$(2,0), (3,0), (4,0), \ldots, (10,0)$	9
1	—–	0
2	$(0,2), (2,2), (4,2), (6,2), (8,2), (10,2)$	6
3	$(0,3), (3,3), (6,3), (9,3)$	4
4	$(0,4), (2,4), (4,4), (6,4), (8,4), (10,4)$	6
5	$(0,5), (5,5), (10,5)$	3
6	$(0,6), (2,6), (3,6), (4,6), (6,6), (8,6), (9,6), (10,6)$	8
7	$(0,7), (7,7)$	2
8	$(0,8), (2,8), (4,8), (6,8), (8,8), (10,8)$	6
9	$(0,9), (3,9), (6,9), (9,9)$	4
10	$(0,10), (2,10), (4,10), (5,10), (6,10), (8,10), (10,10)$	7

Por lo tanto, la cantidad de palmas invisibles es

$$9 + 0 + 6 + 4 + 6 + 3 + 8 + 2 + 6 + 4 + 7 = 55.$$

- Solución 2: En esta solución hacemos el conteo de forma alternativa, contando las palmas visibles. En este caso, (a, b) es visible si a y b no comparten un divisor $d > 1$. Adicionalmente, podemos separar la plantación en tres partes: la región inferior $\{(a, b) : a > b\}$, la diagonal y la región superior $\{(a, b) : a < b\}$. La región inferior y la superior son simétricas, por lo que es suficiente hacer el conteo en una de ellas. En la diagonal solo la palma $(1, 1)$ es visible. Para la región inferior podemos hacer el conteo por columnas:

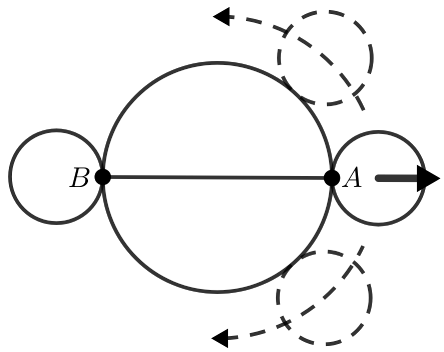
a	Puntos visibles (a, b) en región $a > b$	Cantidad
1	$(1, 0)$	1
2	$(2, 1)$	1
3	$(3, 1), (3, 2)$	2
4	$(4, 1), (4, 3)$	2
5	$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$	4
6	$(6, 1), (6, 5)$	2
7	$(7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6)$	6
8	$(8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7)$	4
9	$(9, 1), (9, 2), (9, 4), (9, 5), (9, 7), (9, 8)$	6
10	$(10, 1), (10, 3), (10, 7), (10, 9)$	4

Por lo tanto, la cantidad de puntos visibles en la región inferior es

$$1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 4 + 6 + 4 = 32.$$

Esto da que la cantidad de puntos visibles en total es $1 + 32 + 32 = 65$, y por lo tanto la cantidad de puntos invisibles es $120 - 65 = 55$.

20. En la siguiente figura ilustrativa, $\overline{AB}$ es un diámetro de una moneda de radio 5. Se coloca una moneda de radio 2 de forma que ambas sean tangentes exteriormente en A, con una flecha pintada hacia la derecha (como se indica en la figura). Ana y Beto juegan girando la moneda pequeña alrededor de la circunferencia de la moneda grande, desde la posición original (como en la figura) hasta detenerse cuando sean tangentes en el punto B. Ana rueda la moneda por arriba y Beto la rueda por abajo.

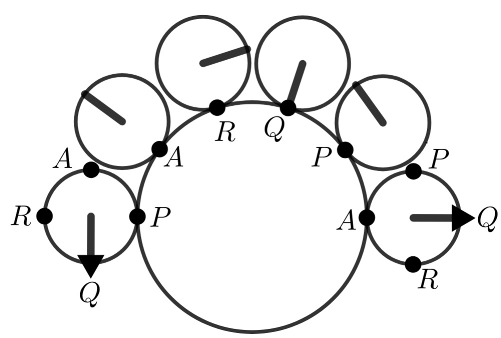


Cuando ambos finalizaron, las flechas de Ana y Beto, en ese orden, apuntaron hacia

(a) la derecha e izquierda
(b) la izquierda y derecha
(c) arriba y abajo
(d) abajo y arriba

Opción correcta: (d)

• Solución: Las longitudes de la circunferencias de las monedas grande y pequeña son 10π y 4π. Por lo tanto, en girar alrededor de una semicircunferencia de la moneda grande (5π), la pequeña habrá completado una vuelta y un cuarto. Con base en esto, podemos dividir nuestra circunferencia pequeña en cuatro partes iguales con los puntos A, P, Q, R, como se indica en la figura.



Si Ana rueda la moneda por arriba, vemos que al llegar a B, el punto de la circunferencia pequeña que será tangente a la moneda grande será P (el orden de los puntos de tangencia habrá sido A, P, Q, R, A, P). Dibujando la moneda, vemos que entonces que la flecha de Ana apunta hacia abajo. En el caso de Beto, el orden de los puntos de tangencia habrá sido A, R, Q, P, A, R, con lo cual la flecha de Beto apunta hacia arriba.