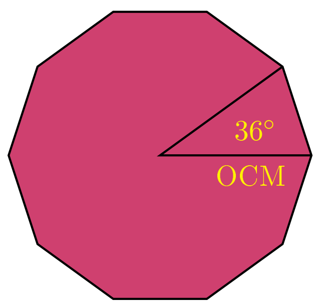
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Examen con soluciones
II Eliminatoria Nacional



Nivel III

(10°, 11° y 12°)

2024

Estimada persona estudiante concursante:
La Comisión de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas 2024 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la II Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

I Parte: Selección única. Valor: 24 puntos, 2 puntos cada pregunta

Las respuestas a estas preguntas deben registrarse en la hoja de respuestas de selección única que se le ha entregado.

1. Si n es un número entero, entonces ¿cuántos valores puede tomar n para que el número $\dfrac{4n+3}{n+6}$ sea entero?

   (a) 8
   (b) 10
   (c) 12
   (d) 14

   Opción correcta: (a)

   Solución: Observamos que

$$\frac{4n+3}{n+6} = \frac{4n+24-21}{n+6} = \frac{4n+24}{n+6} - \frac{21}{n+6} = \frac{4(n+6)}{n+6} - \frac{21}{n+6} = 4 - \frac{21}{n+6}$$

   con lo que el problema se reduce a determinar cuántos valores de n generan un divisor de 21. Como 21 tiene 8 divisores (±1, ±3, ±7 y ±21), entonces n puede tomar 8 valores posibles.

2. Dos enteros positivos m y n se dicen *coprimos* si el único divisor positivo que comparten es el 1. La cantidad de enteros positivos N, con $1 \leq N \leq 1000$, que son coprimos con 24 es igual a

   (a) 166
   (b) 167
   (c) 333
   (d) 334

   Opción correcta: (c)

   Solución 1: Empezamos notando que $24 = 2^3 \cdot 3$, por lo que N es coprimo con 24 si y solo si N no es par, ni múltiplo de 3.

   El conteo del conjunto de números coprimos lo realizaremos considerando el conjunto complementario; es decir, contaremos cuántos enteros positivos M, con $1 \leq M \leq 1000$, son pares o múltiplos de 3. Los conjuntos de números pares y de múltiplos de 3 son

$$\{2, 4, 6, \ldots, 996, 998, 1000\} \quad \text{y} \quad \{3, 6, 9, 12, \ldots, 993, 996, 999\},$$

   los cuales tienen 500 y 333 elementos. El conteo de los elementos que pertenecen a algunos de estos dos conjuntos no es solamente la suma $500 + 333$, pues debemos observar que estos tienen elementos repetidos. Los elementos repetidos son los múltiplos de 6, es decir,

$$\{6, 12, 18, \ldots, 984, 990, 996\},$$

   el cual tiene $996/6 = 116$ elementos. Por lo tanto, la cantidad de enteros positivos M, con $1 \leq M \leq 1000$, que son pares o múltiplos de 3 es igual a $500 + 333 - 116 = 667$. Con esto concluimos que la cantidad de números N, con $1 \leq N \leq 1000$, que son coprimos con 24 es igual a $1000 - 667 = 333$.

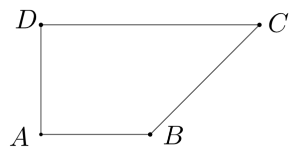
   Solución 2: Al igual que la solución anterior, observamos que N es coprimo con 24 si y solo si N no es par, ni múltiplo de 3. Si escribimos $N = 6k + r$, con $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces vemos que N no es par, ni múltiplo de 3, si y solo si $r \in \{1, 5\}$.

   Podemos separar el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1000\}$ en la siguiente forma

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cup \cdots \cup \{991, 992, 993, 994, 995, 996\} \cup \{997, 998, 999, 1000\}.$$

   De esta manera hay 116 conjuntos de la forma $\{6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6\}$ y el último conjunto $\{997, 998, 999, 1000\}$. En cada uno de los 116 conjuntos hay exactamente dos números coprimos con 24, los cuales aportan $116 \cdot 2 = 332$ números. En el último conjunto, solo 997 es coprimo con 24. Por lo tanto, la cantidad total de números coprimos con 24 es $332 + 1 = 333$.

3. En la figura adjunta, el área del trapecio rectángulo $\square ABCD$ es 96 cm^2. Además, se cumple que $AB = AD$ y $DC = 2AB$. Sean E y F los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.



Según la información anterior, el área del triángulo EFC corresponde a

(a) 24 cm^2

(b) 28 cm^2

(c) 32 cm^2

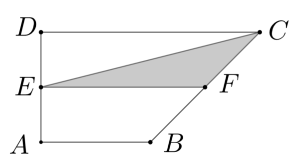
(d) 36 cm^2

Opción correcta: (a)

Solución: Sea $AB = x$, se tiene que $AB = AD$, entonces $AD = x$. Se tiene que $DC = 2AB \Rightarrow DC = 2x$. Además, $(ABCD) = 96$ cm^2 y se sabe que $(ABCD) = \dfrac{(AB + DC)\cdot AD}{2} \Rightarrow \dfrac{(x+2x)x}{2} = 96 \Rightarrow 3x^2 = 192 \Rightarrow x = 8$ cm.

Por otro lado, E es punto medio de $\overline{AD}$ y F es punto medio de $\overline{BC}$, se concluye que $\overline{EF}$ es la paralela media del trapecio $\square ABCD$, entonces $EF = \dfrac{AB + DC}{2} = \dfrac{8+16}{2} = 12$ cm. Además, se obtiene que $ED = 4$ cm.

En la siguiente figura, el área sombreada corresponde al triángulo EFC



Por lo anterior, se tiene $(EFC) = \dfrac{12 \cdot 4}{2} = 24$ cm^2.

4. Hay un planeta donde los habitantes son gigantes y usan números enormes. A una estudiante de primaria de ese planeta le propusieron el siguiente problema: *"En una mesa cuadrada de* $\underbrace{333\cdots33}_{2022}5$ *unidades de lado, se coloca un mantel cuadrado cuyo lado mide* $\underbrace{333\cdots33}_{2021}5$ *unidades. Determine el área sobre la mesa que el mantel no cubre."*

   Ella resuelve el problema pero al escribir el resultado se da cuenta que cometió un error en el dígito que se encuentra en la posición 2024 (contando de derecha a izquierda). ¿Cuál debería ser el dígito correcto correspondiente a dicha posición?

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 6
   (d) 7

   Opción correcta: (b)

   Solución: Si A es el área buscada, entonces $A = \left(\underbrace{33\cdots3}_{2022}5\right)^2 - \left(\underbrace{33\cdots3}_{2021}5\right)^2$.

   Usando la fórmula de diferencia de cuadrados obtenemos que

$$A = \left(\underbrace{33\cdots3}_{2022}5 - \underbrace{33\cdots3}_{2021}5\right)\left(\underbrace{33\cdots3}_{2022}5 + \underbrace{33\cdots3}_{2021}5\right) = \left(3\underbrace{00\cdots0}_{2022}\right)\left(3\underbrace{66\cdots6}_{2020}70\right).$$

   A partir de esta última expresión vemos que $A = 3\cdot 3\underbrace{666\cdots66}_{2020}7\cdot 10^{2023}$.

   Dado que hay 2023 ceros al final de A, el dígito en la posición 2024 corresponde al último dígito del producto $3\cdot 3\underbrace{666\cdots66}_{2020}7$, el cual es igual al último dígito de $3\cdot 7 = 21$.

   Por lo tanto, el dígito que ocupa la posición 2024 es el 1.

5. Charlene toma el número 2024 y le resta la suma de sus dígitos. Al número resultante le resta la suma de sus dígitos, y repite el proceso hasta que le queda un número de un único dígito. El número que obtuvo Charlene al final es

   (a) 6
   (b) 7
   (c) 8
   (d) 9

   Opción correcta: (d)

   Solución 1: El primer número que obtiene Charlene es 2016, que es divisible por 9. Por la regla de divisibilidad por 9, la suma de sus dígitos es divisible por 9, y por tanto al restarlos se obtiene un número divisible por 9. Este comportamiento se repite en cada paso, al restarle a un múltipo de 9 la suma de sus dígitos, se obtiene de nuevo un múltiplo de 9. Finalmente, el único número que es divisible por 9 y tiene un dígito es el propio 9. Por tanto el 9 es el último número que aparece en la secuencia.

   Solución 2: Vamos a demostrar que cuando se resta de un entero natural la suma de sus dígitos, el resultado es siempre divisible por 9. En efecto, si la expansión decimal de n está dada por

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_0 = 10^k a_k + \cdots + a_0$$

   entonces la suma de sus dígitos corresponde con $s = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$, y tenemos

$$\begin{aligned} n - s &= (10^k - 1)a_k + (10^{k-1} - 1)a_{k-1} + \cdots + a_0 \\ &= \underbrace{99\dots9}_{k \text{ veces}} a_k + \underbrace{99\dots9}_{k-1 \text{ veces}} a_{k-1} + \cdots + 9a_1. \end{aligned}$$

   Como cada sumando de la expresión es divisible por 9, concluimos que $n - s$ es divisible por 9.

   A partir de esto podemos afirmar que a partir del segundo paso, los números que obtiene Charlene son todos divisibles por 9. Por tanto el último también debe serlo. De esta forma podemos concluir, al igual que en la solución anterior, que el último número que aparecerá en la lista es el 9.

6. La cantidad de pares ordenados de enteros (a, b) que satisfacen la ecuación $a^2 - ab + b^2 = a + b$, corresponde a

   (a) 2
   (b) 4
   (c) 6
   (d) 8

   Opción correcta: (c)

   Solución: Empezamos reescribiendo la ecuación como una ecuación cuadrática en a,

$$a^2 - (b+1)a + b^2 - b = 0.$$

   Resolviendo lo anterior mediante la fórmula cuadrática deducimos que

$$a = \frac{b + 1 \pm \sqrt{(b+1)^2 - 4(b^2 - b)}}{2} = \frac{b + 1 \pm \sqrt{-3b^2 + 6b + 1}}{2}.$$

   En particular, necesitamos que el discriminante $-3b^2 + 6b + 1$ sea no negativo. Como la función $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ es cóncava, entonces $f(b) \geq 0$ si y solo si b está entre las raíces de f, las cuales son iguales a

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-3)}}{-6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{3}.$$

   Vemos que $\sqrt{12}/3 < 2$, con lo que obtenemos $1 - 2 < b < 1 + 2$, es decir, $-1 < b < 3$, y por lo tanto $b \in \{0, 1, 2\}$.

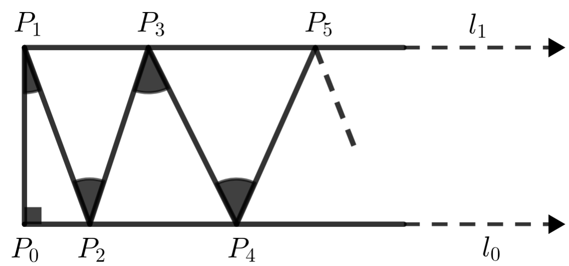
   a) Para $b = 0$ obtenemos $a = (1 \pm 1)/2$, con lo que $a \in \{0, 1\}$.
   b) Para $b = 1$ obtenemos $a = (2 \pm 2)/2$, con lo que $a \in \{0, 2\}$.
   c) Para $b = 2$ obtenemos $a = (3 \pm 1)/2$, con lo que $a \in \{1, 2\}$.

   Con esto concluimos que hay seis posibles pares de enteros que satisfacen la ecuación dada.

7. En la figura se muestran dos rayos paralelos l_0 y l_1 donde se colocan los puntos P_0 y P_1, respectivamente, de forma que el segmento $\overline{P_0P_1}$ es perpendicular a l_0 y l_1. Luego se construye una sucesión de puntos $P_2, P_3, P_4, \ldots$ de acuerdo con las siguientes instrucciones:

   a) El rayo l_0 contiene los puntos $P_0, P_2, P_4, \ldots$ en ese orden y el rayo l_1 contiene los puntos $P_1, P_3, P_5, \ldots$ en ese orden.

   b) Para $n \geq 2$ se cumple que $m\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n = (n-1)^\circ$. Por ejemplo, $m\angle P_0P_1P_2 = 1^\circ$, $m\angle P_1P_2P_3 = 2^\circ$, $m\angle P_2P_3P_4 = 3^\circ$ y $m\angle P_3P_4P_5 = 4^\circ$.



En esta sucesión existe un entero k tal que P_k se puede construir, pero P_{k+1} no se puede construir. El valor de k es igual a

(a) 89
(b) 90
(c) 179
(d) 180

Opción correcta: (c)

Solución 1: Usando las hipótesis sobre las medidas de los ángulos obtenemos que en los triángulos $P_0P_1P_2$, $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_5$ las medidas de los ángulos son iguales a

$$\{90^\circ, 89^\circ, 1^\circ\}, \quad \{89^\circ, 89^\circ, 2^\circ\}, \quad \{89^\circ, 88^\circ, 3^\circ\}, \quad \{88^\circ, 88^\circ, 4^\circ\}$$

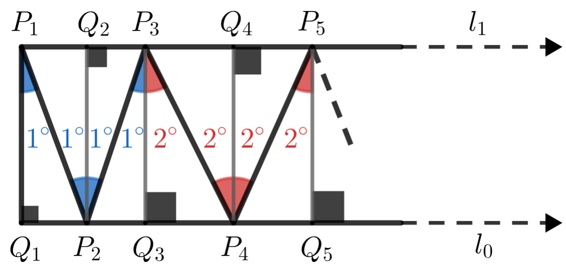
Siguiendo con este patrón, vemos que en los triángulos $P_{176}, P_{177}, P_{178}$ y $P_{177}, P_{178}, P_{179}$ los ángulos son de

$$\{2^\circ, 1^\circ, 177^\circ\}, \quad \{1^\circ, 1^\circ, 178^\circ\}.$$

Sin embargo, si se pudiera construir el punto P_{180}, entonces tendríamos un ángulo igual a 0°, lo cual no es posible. Por lo tanto, concluimos que $k = 179$ es el mayor valor posible.

Solución 2: Para $n \geq 2$, sea Q_n el pie de la perpendicular al rayo contrario desde P_n; renombramos $P_0 = Q_1$. Como todos los segmentos $\overline{P_nQ_n}$ son perpendiculares a los rayos, tenemos que son paralelos entre sí, y por ángulos entre paralelas deducimos que

$$m\angle Q_kP_kP_{k+1} = m\angle P_kP_{k+1}Q_{k+1}.$$



Usando la relación anterior deducimos que

$$m\angle Q_2P_2P_3 = m\angle P_1P_2P_3 - \angle P_1P_2Q_2 = m\angle P_1P_2P_3 - m\angle Q_1P_1P_2 = 2^\circ - 1^\circ = 1^\circ.$$

con lo cual los cuatro ángulos $\angle Q_1P_1P_2$, $\angle P_1P_2Q_2$, $\angle Q_2P_2P_3$, $\angle P_2P_3Q_3$ tienen medida 1°. Usando estos resultados, obtenemos que

$$m\angle Q_3P_3P_4 = m\angle P_2P_3P_4 - m\angle P_2P_3Q_3 = 3^\circ - 1^\circ = 2^\circ.$$

En un argumento análogo al cálculo de $m\angle Q_2P_2P_3$ encontramos que

$$m\angle Q_4P_4P_5 = m\angle P_3P_4P_5 - m\angle P_3P_4Q_4 = m\angle P_3P_4P_5 - m\angle Q_3P_3P_4 = 4^\circ - 2^\circ = 2^\circ,$$

con lo cual nuevamente los cuatro ángulos $\angle Q_3P_3P_4$, $\angle P_3P_4Q_4$, $\angle Q_4P_4P_5$, $\angle P_4P_5Q_5$ tienen medida 2°. Continuando de esta manera, podemos deducir que si k es un número impar tal que $(k+1)/2 < 90^\circ$, los puntos P_k, P_{k+1} y P_{k+2} están definidos y los cuatro ángulos $\angle Q_kP_kP_{k+1}$, $\angle P_kP_{k+1}Q_{k+1}$, $\angle Q_{k+1}P_{k+1}P_{k+2}$, $\angle P_{k+1}P_{k+2}Q_{k+2}$ tienen medida $(k+1)^\circ/2 < 90^\circ$.

El mayor entero impar k que cumple lo anterior es $k = 177$, con lo cual se asegura que los puntos P_{177}, P_{178} y P_{179} están definidos. Si el punto P_{180} estuviera definido, entonces tendríamos que

$$m\angle Q_{179}P_{179}P_{180} = m\angle P_{178}P_{179}P_{180} - m\angle P_{178}P_{179}Q_{179} = 179^\circ - \frac{(177+1)^\circ}{2} = 90^\circ,$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, concluimos que $k = 179$ es el mayor valor posible.

8. Carlos y Diana juegan tirando una moneda justa (misma probabilidad de obtener escudo o corona). Carlos tira la moneda 2 veces y Diana la tira 3 veces. La probabilidad de que Diana obtenga más escudos que Carlos es igual a

   (a) 1/4
   (b) 1/3
   (c) 4/9
   (d) 1/2

   Opción correcta: (d)

   Solución 1: Denotamos por C y E los resultados corona y escudo. Llamamos un evento *favorable* al caso en que Diana obtenga más escudos. Los posibles resultados de Carlos y Diana son

$$\{CC, CE, EC, EE\} \quad \text{y} \quad \{CCC, CCE, CEC, ECC, CEE, ECE, EEC, EEE\}.$$

   Por lo tanto, la cantidad total de eventos (resultados conjuntos de Carlos y Diana) es $4 \cdot 8 = 32$. Procedemos ahora a contar los eventos favorables.

   a) Si Diana saca tres escudos (es decir, obtiene EEE), entonces el evento va a ser favorable sin importar el resultado Carlos (que obtiene a lo sumo dos escudos). Esto nos da 4 eventos favorables.
   b) Si Diana saca dos escudos (es decir, obtiene alguna de $\{CEE, ECE, EEC\}$), entonces el evento va a ser favorable si Carlos obtiene uno o cero escudos (es decir, si obtiene $\{CC, CE, EC\}$). Esto nos da $3 \cdot 3 = 9$ eventos favorables.
   c) Si Diana saca un escudo (es decir, obtiene alguna de $\{CCE, CEC, ECC\}$), entonces el evento va a ser favorable si Carlos obtiene cero escudos (es decir, si obtiene $\{CC\}$). Esto nos da 3 eventos favorables.
   d) Si Diana no saca ningún escudo, entonces el evento no puede ser favorable.

   De esta forma obtenemos $4 + 9 + 3 = 16$ eventos favorables y por lo tanto la probabilidad es $16/32 = 1/2$.

   Solución 2: Sean c_C, c_D la cantidad de coronas y e_C, e_D la cantidad de escudos que Carlos y Diana, respectivamente, obtienen en algún evento. Sea A el conjunto de eventos en que Diana saca más escudos que Carlos (es decir, $e_D > e_C$) y sea B el conjunto de eventos en que Diana saca más coronas que Carlos (es decir, $c_D > c_C$). Vamos a demostrar que A y B son conjuntos disjuntos y complementarios. Si A y B no fueran disjuntos, entonces existiría un evento que pertenece a A y a B, por lo cual este evento debería cumplir que $e_D \geq e_C + 1$ y $c_D \geq c_C + 1$. Sin embargo, esto no es posible porque

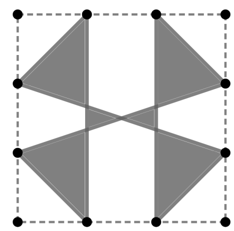
$$(e_C + 1) + (c_C + 1) = 4 > 3 = e_D + c_D.$$

   Si A y B no fueran complementarios, entonces existiría un evento que no pertenece ni a A, ni a B, por lo cual este evento debería cumplir que $e_D \leq e_C$ y $c_D \leq c_C$. Sin embargo, esto no es posible porque

$$e_D + c_D = 3 > 2 = e_C + c_C.$$

   Por lo tanto, los conjuntos A y B son disjuntos y complementarios. Además, dado que la moneda es justa, entonces obtenemos que los eventos A y B son igualmente probables. Por lo tanto, podemos concluir que la probabilidad de que ocurra un evento de A es $1/2$.

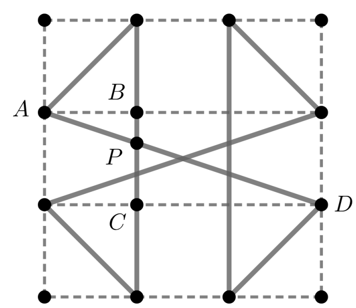
9. En la figura se muestra un cuadrado 3×3, donde los puntos dividen a cada lado en tres partes iguales. Si el área de la región sombreada se expresa como la fracción reducida a/b, entonces el valor de $a+b$ es igual a



(a) 4
(b) 11
(c) 17
(d) 23

Opción correcta: (d)

Solución: Vemos que en las cuatro esquinas se forman 4 triángulos de área $1/2$, lo cual aporta área 2 a la figura. A continuación analizamos el área restante. Sean A, B, C, D, P como en la figura.



Por ángulos alternos internos vemos que $m\angle BAP = m\angle CDP$, y por ángulos opuestos al vértice vemos que $m\angle APB = m\angle CPD$. Con base en esto obtenemos la semejanza $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Como $AB = 1$ y $CD = 2$, entonces deducimos que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Longrightarrow BP = \frac{1}{3}.$$

De esta manera el área del triángulo ABP es igual a $1/2 \cdot AB \cdot BP = 1/2 \cdot 1 \cdot 1/3 = 1/6$. Junto con los otros tres triángulos simétricos obtenemos un área de $4 \cdot 1/6 = 2/3$.

Usando nuevamente que $BP = 1/3$, vemos que el área de cada uno de los dos triángulos del cuadrado central es igual a $1/2 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 1/12$, con lo cual los dos triángulos dan un área de $1/6$. Con esto podemos finalmente calcular el área sombreada

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+1}{6} = \frac{17}{6} \Longrightarrow a + b = 17 + 6 = 23.$$

10. Hay 20 tarjetas y cada una de ellas tiene un número escrito. Siempre que se forman 10 parejas de tarjetas, se cumple que al menos dos de estas parejas tienen números cuya suma da el mismo resultado.

Analice las siguientes proposiciones:

(I) Existen al menos cuatro tarjetas que tienen el mismo número.

(II) No hay más de 8 números distintos escritos en las tarjetas.

Con total certeza, ¿cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas?

(a) Ninguna

(b) Solo la I

(c) Solo la II

(d) Ambas

Opción correcta: (b)

Solución: Empezamos analizando la primera afirmación. Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{20}$ los números escritos en las 20 tarjetas. Al agrupar las tarjetas con los números $\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots, \{a_{19}, a_{20}\}$ vemos que las sumas obtenidas son

$$a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 \leq \cdots \leq a_{19} + a_{20}.$$

La condición del problema nos dice que al menos dos de estas sumas deben ser iguales, por lo tanto, existe k tal que $a_k + a_{k+1} = a_{k+2} + a_{k+3}$. Sin embargo, por las desigualdades $a_k, a_{k+1} \leq a_{k+2}, a_{k+3}$ tenemos que la igualdad puede darse si y solo si $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3}$, con lo cual (I) es verdadera.

Para la segunda afirmación consideramos la rotulación $\{0, 0, \cdots, 0, 1, 2, 3, \cdots, 8\}$, donde hay 12 tarjetas que tienen escrito un 0. Al hacer 10 parejas, debe haber al menos dos parejas formadas únicamente por 0's, con lo cual su suma $(0+0)$ va a ser igual. Por lo tanto vemos que se cumplen las hipótesis del problema, pero hay 9 números distintos, con lo cual (II) es falsa. Por lo tanto, solo (I) es verdadera.

11. Ana escribe un número de cuatro dígitos $abcd$, con $d-a=c-b>0$, y luego invierte el orden de los dígitos para obtener el número de cuatro dígitos $dcba$. Posteriormente resta los dos números y observa que el resultado es el doble de un cuadrado perfecto. ¿Cuántos números de cuatro dígitos cumplen lo observado por Ana?

    (a) 28
    (b) 49
    (c) 56
    (d) 58

    Opción correcta: (d)

    Solución: Sean $N = abcd = 1000a + 100b + 10c + d$ y $M = dcba = 1000d + 100c + 10b + a$. Note que como $d > a$, entonces Ana realizó la resta

$$M - N = 999d + 90c - 90b - 999a = 999(d-a) + 90(c-b).$$

Si $k = d - a = c - b$, entonces

$$M - N = 999k + 90k = 1089k = 3^2 \cdot 11^2 \cdot k = 33^2 \cdot k.$$

Para que la resta sea el doble de un cuadrado perfecto k también tiene que serlo, por lo que debe ser $k = 2$ o $k = 8$.

a) Si $k = 2$, es decir, $d - a = c - b = 2$, entonces los posibles pares para (a, d) son $(1, 3)$, $\ldots$, $(7, 9)$, pues $a \neq 0$, con lo que hay 7 posibilidades. Del mismo modo los posibles pares para (b, c) son $\{(0, 2), (1, 3), \ldots, (7, 9)\}$, lo cual da 8 posibilidades. Con esto tenemos $7 \cdot 8 = 56$ números que cumplen la observación de Ana.

b) Si $k = 8$, es decir, $d - a = c - b = 8$, entonces el único posible par para (a, d) es $(1, 9)$, pues $a \neq 0$. Del mismo modo los posibles pares para (b, c) son $\{(0, 8), (1, 9)\}$, lo cual da 2 posibilidades. Con esto tenemos 2 números adicionales que cumplen la observación de Ana.

Por lo tanto, la cantidad de números que puede escribir Ana es $56 + 2 = 58$.

12. Considere un dado en forma de cubo, con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ escritos en sus caras y suponga que cada número tiene la misma probabilidad de aparecer. Al tirar el dado cuatro veces y sumar los cuatro números obtenidos, el resultado más probable de conseguir es el 14. Los resultados en diferente orden se consideran como eventos distintos; por ejemplo, obtener los números $1, 2, 5, 6$ (es decir, 1 en el primer turno, 2 en el segundo, 5 en el tercero y 6 en el cuarto) se considera diferente a obtener $6, 5, 1, 2$, y ambas se cuentan como formas distintas de obtener al 14 como suma. La cantidad de formas de obtener al 14 como suma es igual a

    (a) 140
    (b) 142
    (c) 144
    (d) 146

    Opción correcta: (d)

    Solución: Sean a, b, c, d los números obtenidos en el primer, segundo, tercer y cuarto lanzamiento, respectivamente. Consideramos las sumas $S = a + b$ y $T = c + d$, de forma que buscamos que $S + T = 14$. Los valores de S y T varían entre 2 y 12, y las posibles combinaciones que suman 14 son

$$(S, T) = \{(2, 12), (3, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 7), (8, 6), (9, 5), (10, 4), (11, 3), (12, 2)\}.$$

A continuación, dada una posible suma (entre 2 y 12), contamos la cantidad de pares ordenados (a, b) que dan este valor:

Suma	Pares (a, b)	Cantidad de pares
2	$\{(1,1)\}$	1
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	2
4	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	3
5	$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	4
6	$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	5
7	$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	6
8	$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$	5
9	$\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	4
10	$\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$	3
11	$\{(5,6),(6,5)\}$	2
12	$\{(6,6)\}$	1

Por ejemplo, con lo anterior podemos ver que la cantidad de formas de obtener $(S, T) = (5, 9)$ es igual al producto de formas de obtener $S = 5$ y $T = 9$, es decir, $4 \cdot 4$. Por lo tanto, con la lista anterior de todos los posibles pares (S, T) tales que $S + T = 14$, obtenemos que la suma de las posibilidades es

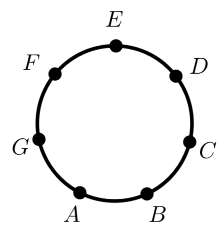
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1,$$

lo cual es igual a $2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) + 36 = 2 \cdot 55 + 36 = 110 + 36 = 146$.

II Parte: Desarrollo. **Valor: 14 puntos, 7 puntos cada pregunta**

Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas de respuestas para preguntas de desarrollo que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Circulandia es un país con siete provincias arregladas en forma circular (como en la figura).



Una *visita* consiste en desplazarse a una ciudad vecina; por ejemplo, desde A se puede visitar solamente B o G, o desde D se puede visitar solamente C o E. Un *paseo de longitud* N consiste en una sucesión de N visitas que comienzan y terminan en A; está permitido que las visitas del paseo puedan pasar por A en algún momento intermedio. A continuación se muestran ejemplos de paseos de longitud 4 y 11, respectivamente:

$$A \mapsto B \mapsto A \mapsto G \mapsto A \quad \text{y} \quad A \mapsto B \mapsto C \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto C \mapsto D \mapsto E \mapsto F \mapsto G \mapsto A.$$

a) Determine la cantidad de paseos de longitud 8.

b) Determine la cantidad de paseos de longitud 9.

Solución 1: En lugar de contar solamente los caminos que empiezan y terminan en A, vamos a contar los caminos de longitud N que empiezan en A y terminan en otras provincias (no solamente en A). Esto lo usaremos de la siguiente manera: la cantidad de caminos de longitud $N+1$ que terminan en determinada ciudad es la suma de la cantidad de caminos de longitud N que terminan en sus dos ciudades vecinas. De esta forma podemos construir la siguiente tabla de forma recursiva:

N	E	F	G	A	B	C	D
1	0	0	1	0	1	0	0
2	0	1	0	2	0	1	0
3	1	0	3	0	3	0	1
4	1	4	0	6	0	4	1
5	5	1	10	0	10	1	5
6	6	15	1	20	1	15	6
7	21	7	35	2	35	7	21
8	28	56	9	70	9	56	28
9	84	37	126	18	126	37	84

De esta forma concluimos que la cantidad de paseos de longitud 8 es 70 y la de longitud 9 es 18.

Solución 2: Podemos clasificar las visitas en dos tipos: en sentido antihorario (a) u horario (h). De esta manera, podemos identificar una sucesión de visitas con una palabra formada por las letras a y h. Por ejemplo, el paseo $A \to B \to A \to G \to A$ corresponde a la palabra $ahha$.

Para que la sucesión de visitas sea un *paseo* (es decir, que empiece y termine en la ciudad A) debemos tener que la diferencia entre la cantidad de letras a y h en la palabra sea divisible por 7 (pues 7 es la longitud de una vuelta a Circulandia). En el caso de paseos de longitud 8, buscamos que las cantidades de ambas letras sumen 8 y su diferencia sea un múltiplo de 7. Esto solo se puede lograr si hay 4 letras a y 4 letras h. La cantidad de palabras que se pueden formar en este caso son

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70.$$

Para el caso de paseos de longitud 9, la cantidad de letras a y h debe ser 1 y 8, u 8 y 1. Por lo tanto, la cantidad de paseos es igual a

$$2 \cdot \binom{9}{1} = 2 \cdot 9 = 18.$$

2. Considere los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, es decir, los polinomios de la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales.

   a) Encuentre constantes A, B, C tales que la relación $p(4) = A \cdot p(1) + B \cdot p(2) + C \cdot p(3)$ se cumpla para cualquier polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$.

   b) Suponga que los tres valores $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$ son iguales a los tres números 1, 2 y 3 en algún orden; por ejemplo, $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$. Encuentre el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ que maximiza el valor de $p(4)$.

Solución: Sean P, Q, R los valores de $p(1), p(2), p(3)$, respectivamente. Vamos a empezar encontrando los coeficientes a, b, c, en términos de P, Q, R, de manera que podremos calcular $p(4)$ en términos de P, Q, R. Tenemos entonces que

$$p(1) = a + b + c = P, \quad p(2) = 4a + 2b + c = Q, \quad p(3) = 9a + 3b + c = R.$$

Reemplazando la primera ecuación en las otras dos obtenemos que

$$Q = 4a + 2b + c = (3a + b) + (a + b + c) = (3a + b) + P,$$
$$R = 9a + 3b + c = (8a + 2b) + (a + b + c) = (8a + 2b) + P,$$

con lo cual deducimos que $Q - P = 3a + b$ y $R - P = 8a + 2b$. Podemos repetir el proceso para deducir que

$$R - P = 8a + 2b = 2a + 2(3a + b) = 2a + 2(Q - P),$$

con lo cual obtenemos que

$$a = \frac{(R - P) - 2(Q - P)}{2} = \frac{P - 2Q + R}{2}.$$

Con esto deducimos que

$$b = Q - P - 3a = (Q - P) - 3 \cdot \frac{P - 2Q + R}{2} = \frac{-5P + 8Q - 3R}{2},$$
$$c = P - a - b = P - \frac{P - 2Q + R}{2} - \frac{-5P + 8Q - 3R}{2} = 3P - 3Q + R.$$

Con esto concluimos que

$$p(4) = 16a + 4b + c = 8(P - 2Q + R) + 2(-5P + 8Q - 3R) + (3P - 3Q + R) = P - 3Q + 3R,$$

es decir, $p(4) = p(1) - 3p(2) + 3p(3)$.

Para maximizar el valor de $p(4) = p(1) - 3p(2) + 3p(3)$, vemos que $p(3)$ debe tomar el mayor valor y $p(2)$ el menor. Por lo tanto, bajo la hipótesis que $p(1), p(2), p(3)$ toman los valores $1, 2, 3$ en algún orden, podemos concluir que el valor de $p(4)$ se maximiza cuando $p(1) = 2$, $p(2) = 1$ y $p(3) = 3$, de forma que

$p(4) = 2 - 3 + 9 = 8$. La fórmula para los coeficientes de $p(x)$ había sido calculada en la parte anterior, con lo cual obtenemos que son iguales a

$$a = \frac{2 - 2 \cdot 1 + 3}{2} = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{-5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{2} = \frac{-11}{2}, \quad c = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 = 6,$$

es decir, $p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$.