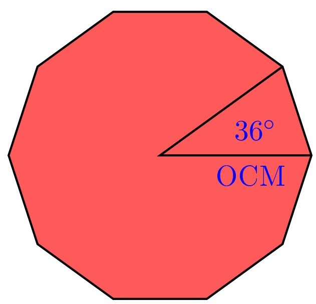
36° OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UTN - UNED - MICITT

Examen con Soluciones
II Eliminatoria Nacional



Nivel I

(7°)

2024

Estimada persona estudiante concursante:
La Comisión de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas 2024 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la II Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, le deseamos los mayores éxitos.
La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia de puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre P y R.

I Parte: Selección única. **Valor: 24 puntos, 2 puntos cada pregunta**

Las respuestas a estas preguntas deben registrarse en la hoja de respuestas de selección única que se le ha entregado.

1. La suma de cuatro números enteros positivos pares es igual a 2028. El valor que se obtiene al sumar todos los dígitos de los cuatros números corresponde a

   (a) 34
   (b) 39
   (c) 48
   (d) 60

   Opción correcta: (b)

   Solución: De acuerdo con la información del problema se obtiene la siguiente ecuación: $2n + 2n + 2 + 2n + 4 + 2n + 6 = 2028$. Luego se obtiene que $n = 252$. Por lo anterior, los cuatro números pares consecutivos son: $504, 506, 508$ y 510. La suma de los dígitos de todos los números es $4 \cdot 5 + 4 + 6 + 8 + 1 = 39$.

2. Se define la expresión $(A \heartsuit B) = A - B$, entonces el valor de $[(5 \heartsuit 1) \heartsuit (3 \heartsuit 2)]$ es igual a

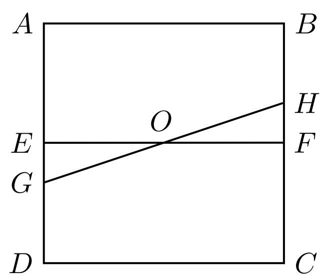
   (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 6

   Opción correcta: (b)

   Solución: Dado que $(A \heartsuit B) = A - B$ entonces
   $5 \heartsuit 1 = 5 - 1 = 4$
   $3 \heartsuit 2 = 3 - 2 = 1$
   $(5 \heartsuit 1) \heartsuit (3 \heartsuit 2) = 4 \heartsuit 1 = 4 - 1 = 3.$

3. Considere el cuadrado $ABCD$ con área de 81 cm^2. Se sabe que $AE = FC$, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ y $EG = HF = 1$ cm.

   ¿Cuál es la suma de las áreas de $\triangle EGO$ y $\triangle OHF$?



   (a) 9 cm^2
   (b) $\frac{9}{4}$ cm^2
   (c) $\frac{9}{2}$ cm^2
   (d) $\frac{81}{8}$ cm^2

   Opción correcta: (c)

   Solución: Como el área del cuadrado es 81 cm^2 entonces sus lados miden 9 cm. Luego como, los segmentos se intersecan en el centro entonces las alturas de los triángulos que forma ángulo recto con los lados del cuadrado miden 4.5 cm y la base es 1cm por lo que cada triángulo tiene área 2.25 cm^2, así la suma de cada área da 4.5 cm^2.

4. Se tiene un número n de tres cifras. A partir de n se crea un número k que cumple con las siguientes características:

   a) El dígito de las decenas de k es el doble del dígito de las decenas de n.
   b) El dígito de las unidades de k es el triple del dígito de las unidades de n.
   c) Tanto n como k tienen el mismo cociente al ser divididos por 100.

   El mayor número que puede ser n corresponde a:

   (a) 923
   (b) 943
   (c) 989
   (d) 999

   Opción correcta: (b)

   Solución: De la tercera característica sabemos que ambos números tienen la misma cifra de las centenas. Y como buscamos que el número n sea el más grande posible es necesario que el dígito de las centenas de n sea 9.

   De la característica 1 sabemos que las decenas de k deben ser el doble de las de n por lo que el máximo valor para las centenas de n es 4, pues si colocamos más de 4 centenas al multiplicar por 2 tendremos un numero mayor a 9 lo que no puede representar un dígito.

   Finalmente, de la segunda característica tenemos que n tiene que tener como máximo un 3 en las unidades para que k tenga un 9, pues de lo contrario las unidades de k serían más de 10.

   Por tanto $n = 943$.

5. Fernando, el vendedor de huevos del mercado, tiene a su disposición una cantidad de huevos mayor que 99. Al preguntarle cuántos huevos tenía, contestó que si forma grupos de 11 huevos sobran 5, pero si forma grupos de 7 sobran 3. ¿Cuál es el menor número de huevos que podía tener Fernando para la venta?

   (a) 115
   (b) 123
   (c) 154
   (d) 302

   Opción correcta: (a)

   Solución: Tenemos que la cantidad n de huevos que Fernando tiene cumple:

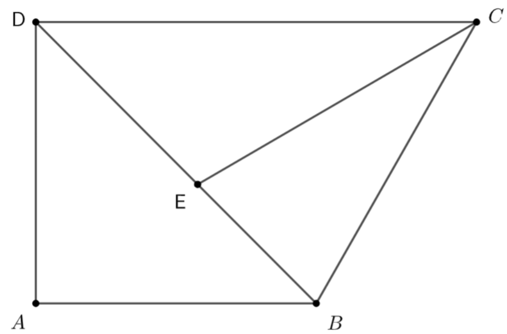
$$n = 11a + 5 \quad \text{y} \quad n = 7b + 3,$$

donde $a > 8$ y $b > 13$, puesto que la cantidad de huevos n es un números de más de dos cifras. La siguiente tabla muestra para que valores de a y b las expresiones son iguales.

	$11a + 5$	$7b + 3$	
$a = 9$	$11 \cdot 9 + 5 = 104$	$7 \cdot 14 + 3 = 101$	para $b = 14$
$a = 10$	$11 \cdot 10 + 5 = 115$	$7 \cdot 15 + 3 = 108$	para $b = 15$
		$7 \cdot 16 + 3 = 115$	para $b = 16$

La igualdad se cumple cuando $a = 10$ y $b = 16$ esto implica que
$n = 7 \cdot 16 + 3 = 115$ esta es la menor cantidad de huevo que Fernando tiene.

6. En la figura adjunta se tiene el $\square ABCD$ tales que $AB = AD$, $\angle BAD$ es recto, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{EC}$ biseca al $\angle BCD$. Además, $m\angle DCB = \dfrac{4}{3} m\angle BDC$.



Según la información anterior, la $m\angle CEB$ corresponde a

(a) $30°$
(b) $45°$
(c) $75°$
(d) $105°$

Opción correcta: (c)

Solución: Se tiene que $AB = AD$, entonces el triángulo ABD es isósceles, además, $m\angle BAD = 90°$, entonces $m\angle ADB = m\angle ABD$, por el Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo se concluye que $m\angle ADB = m\angle ABD = 45°$. Observe que $m\angle ADC = 90°$, por ángulos complementarios se tiene que $m\angle BDC = 45°$. Como la $m\angle DCB = \dfrac{4}{3} m\angle BDC$, entonces $m\angle DCB = 60°$.

Por otro lado, se tiene que $\overline{EC}$ biseca al $\angle BCD$, entonces $m\angle DCE = m\angle BCE = 30°$. por el Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo se tiene $m\angle EDC + m\angle DCE + m\angle CED = 180° \Rightarrow m\angle CED = 105°$. Por ángulos suplementarios se tiene que $m\angle CEB = 75°$.

7. ¿Cuántos números positivos menores que 999 son divisibles por 2, 5 y 9 simultáneamente?

    (a) 12

    (b) 11

    (c) 9

    (d) 6

    Opción correcta: (b)

    Solución: El número debe tener la forma $ab0$ con $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a y b no ambos nulos, pues debe ser divisible por 2 y 5. Ahora, para que se divisible por 9 la suma de sus dígitos debe ser divisible por 9. Entonces, se deben tener $9|(a+b)$, así los pares que cumplen esto son $(9, 0)$,$(0, 9)$,$(8, 1)$,$(1, 8)$,$(7, 2)$, $(2, 7)$,$(6, 3)$,$(3, 6)$,$(5, 4)$,$(4, 5)$,$(9, 9)$. Contando se tienen 11 pares y por lo tanto 11 números con las condiciones solicitadas.

8. Sea $z = (x-1)^{100}$, donde x es un número entero que está entre 1 y 11 inclusive. Considere las siguientes proposiciones:

   I. La menor cantidad de dígitos que puede tener z es 1.

   II. La mayor cantidad de dígitos que puede tener z es 100.

   III. z siempre es un número positivo.

   Entonces

   (a) Las proposiciones I y II son verdaderas.

   (b) La proposiciones I y III son verdaderas.

   (c) Las proposiciones II y III son verdaderas.

   (d) Únicamente la proposición I es verdadera.

   Opción correcta: (d)

   Solución: Si $x = 1$, se tiene que $z = 0$, por lo que z está compuesto por un solo dígito. Con esto se concluye que la I es verdadera y la III falsa. Por otra parte, si $x = 11$ entonces $z = 10^{100}$, es decir, z tiene 101 dígitos, con lo que la segunda proposición también es falsa.

9. Se tiene dos números enteros a y b que cumplen las siguientes igualdades:

$$|a \cdot b| = 72$$
$$a = b + 17$$

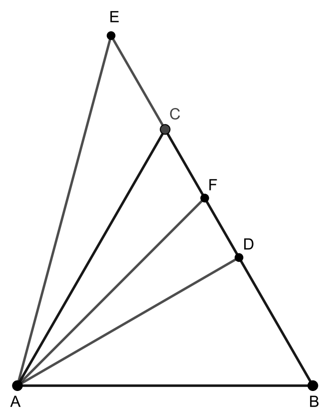
Entonces el valor de $|a + b|$ corresponde a

(a) 1
(b) 6
(c) 14
(d) 17

Opción correcta: (a)

Solución: la primera igualdad nos habla de dos enteros que multiplicados dan 72. La segunda igualdad nos deja ver que a es 17 unidades mayor que b. Los valores que multiplicados dan 72 son $72 \cdot 1, 36 \cdot 2, 24 \cdot 3, 18 \cdot 4, 12 \cdot 6, 9 \cdot 8$. Al estar el producto en valor absoluto también se deben considerar las combinaciones de un factor negativo, o ambos. De $a = b + 17$ se observa que a y b son de diferente paridad, si b es par, entonces a es impar, si b es impar, entonces a es par. Por tanto se descartan las combinaciones en las que ambos factores son pares, quedando solamente: $72 \cdot 1, 24 \cdot 3, 9 \cdot 8$. Ahora verificamos la condición $a = b + 17$ y descubrimos que si a y b son ambos positivos o ambos negativos la condición no se cumple. Si se prueba que con un factor positivo y otro negativo se tiene que si $a = 8 \Rightarrow b = -9$ y si $a = 9 \Rightarrow b = -8$. En ambos casos $|a + b| = 1$.

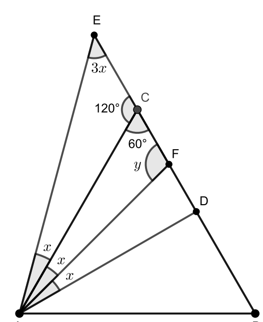
10. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero y $AD = DE$. Si se tiene que: $m\angle EAC = m\angle CAF = m\angle FAD$, entonce la $m\angle EFA$ corresponde a



(a) $100°$
(b) $105°$
(c) $110°$
(d) $115°$

Opción correcta: (c)

Solución: Sea $x = m\angle EAC = m\angle CAF = m\angle FAD$, $y = m\angle AFC$. Como el $\triangle ADE$ es isósceles entonces $m\angle AED = 3x$. Por otra parte como $m\angle ACB = 60°$ entonces $m\angle ACE = 120°$. Considerando el $\triangle ACE$ se tiene que $x + 3x + 120° = 180°$ y se tiene que $x = 15°$. Considerando el $\triangle AFC$ se tiene que $15° + y + 60° = 180°$, donde $y = 105°$.



11. La edad promedio de un grupo de 14 estudiantes es de 21 años, mientras que la edad promedio de otro grupo de 16 estudiantes es 18 años. Si ambos grupos se juntan en uno solo, ¿cuál es la edad promedio de este nuevo grupo?

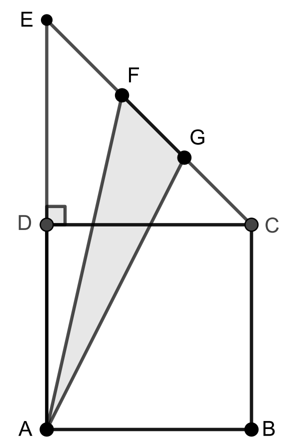
    (a) 20 años
    (b) 19 años
    (c) 18.6 años
    (d) 19.4 años

    Opción correcta: (d)

    Solución: Dado que la edad promedio del grupo de 14 estudiantes es de 21 años, entonces la suma de las edades es 294 años. De la misma forma se obtiene que la suma de las edades del grupo de 16 estudiantes es 288 años.

    Luego, la edad promedio del nuevo grupo está dado por $\dfrac{294 + 288}{30} = 19.4$ años.

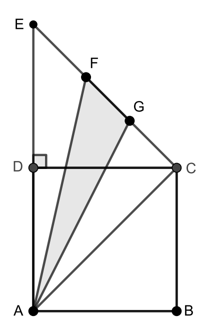
12. En la figura el $\square ABCD$ es un cuadrado cuya diagonal mide $18cm$ y el $\triangle EDC$ es un triángulo rectángulo isósceles. Si $3FG = EC$ entonces el área, en cm^2 del $\triangle FGA$ corresponde a



(a) 27
(b) 36
(c) 45
(d) 54

Opción correcta: (d)

Solución: Note que, si trazamos la diagonal $\overline{AC}$, podemos observar que el $m\angle DAC = 45°$ y como el $\triangle EDC$ es isósceles entonces $m\angle DEC = 45°$, por lo tanto el $\triangle ACE$ es isósceles y $AC = EC$. También $\overline{AC} \perp \overline{EC}$. Luego $FG = \frac{1}{3}EC = 6$, y el área $\triangle FGA$ es $\dfrac{6 \cdot 18}{2} = 54$.



II Parte: Desarrollo. Valor: 14 puntos, 7 puntos cada pregunta

Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas de respuestas para preguntas de desarrollo que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sobre una mesa se tienen 12 fichas. Sofía y Mariana juegan alternadamente a retirar fichas. La primera en jugar puede retirar como mínimo una ficha, pero no todas. Además, cada una de ellas en su turno retira como mínimo una ficha y como máximo el doble de fichas que la otra jugadora retiró en su turno anterior. Gana quien retira la última ficha. Suponga que Sofía es la primera en jugar y retira 3 fichas. Compruebe que Mariana tiene una estrategia ganadora y descríbala.

   Nota: una persona jugadora tiene una estrategia ganadora si puede asegurar que ganará el juego independientemente de lo que realice su adversario.

   Solución: Dado que Sofía inicia el juego y retira 3 fichas, entonces quedan 9. En este caso Mariana puede retirar hasta un máximo de 6 fichas. Para asegurar su victoria, Mariana debe retirar 1 ficha, quedando 8. En el siguiente turno, Sofía puede retirar 1 o 2 fichas.

   - Si Sofía retira 2 fichas (quedan 6), entonces en el siguiente turno Mariana retira 1 ficha (quedan 5). Si Sofía retira 2 fichas, quedan 3 y en el siguiente turno Mariana las toma (ya que puede tomar un máximo de 4) y gana. Si Sofía retira 1, quedan 4. En este caso Mariana retira 1 y quedan 3. Pero note que independietemente que Sofía retire 1 o 2 fichas siempre va a perder.
   - Si Sofía retira 1 ficha (quedan 7), entonces Mariana retira 2 (quedan 5). Si Sofía retira 1 o 2, entonces sería idéntico al caso anterior. Si Sofía retira 3, quedan 2 y pierde, ya que Mariana las toma en su siguiente turno. Si Sofía retira 4, queda 1 y evidentemente pierde.

   De este modo, Mariana asegura el gane.

2. En una pizarra están escritos en orden todos los números enteros positivos del 1 al 10 000. Si se borran todos los múltiplos de 3 y después todos los múltiplos de 13, de los números que quedan sin borrar, ¿cuál queda en la posición 2024?

   Solución:

   Note que para los números del 1 al 39, se tienen que borrar los números

   $$3, 6, 9, 12, 13, 5, 18, 21, 24, 26, 27, 30, 33, 36, 39$$

   los cuales corresponden a los 15 múltiplos de 3 y 13, entonces del 1 al 39 quedan 24 números en la lista. Ahora, note que

   $$2024 = 24 \cdot 84 + 8$$

   Esto quiere decir que, para la llegar a la posición 2024 se debe recorrer 24 números 84 veces y avanzar 8 números más.

   Entonces para el número de la posición 2024 se tiene que recorrer 84 veces 39 números, es decir

   $$39 \cdot 84 = 3276$$

   pero hay que avanzar 8 números más que no sean múltiplos de 3 ni de 13, entonces se tiene que

   $$3277, 3278, \underbrace{3279}_{3n}, 3280, 3281, \underbrace{3282}_{3n}, 3283, 3284, \underbrace{3285}_{3n}, 3286, 3287$$

   Por lo tanto el número de la posición 2024 es

   $$3287$$